

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

1 Intérêts, valeur acquise, valeur actuelle

■ EXERCICE 1

On place un capital $C_0 = 2\,000\text{ €}$ en « obligations » à 3,41 % par an, avec intérêt simple, pendant 10 ans.
Calculer le capital disponible au bout de 10 ans.

■ EXERCICE 2

Calculer la valeur acquise par un capital C de 2 650 € placé à intérêts composés pendant 4 ans au taux semestriel de 1,50%.
En déduire le montant des intérêts acquis. *Arrondir au centime d'euros.*

■ EXERCICE 3

Déterminer à quel taux annuel il faut placer, à intérêts composés, une somme de 10 000 € pour que sa valeur acquise au bout de deux ans de placement soit de 10 816 €.

■ EXERCICE 4

1. Déterminer la valeur actuelle C_0 du capital C_7 qui, placé aujourd'hui, à intérêts composés au taux annuel de 3,25%, vaudra 6 000 € dans 7 ans ?
2. Quel capital faut-il placer aujourd'hui à 1,5% par an, avec intérêts composés, pour que la valeur acquise dans 10 ans soit 20 000 € ?

■ EXERCICE 5

On a placé 1 500 € sur un compte épargne il y a 4 ans, jour pour jour, à intérêts composés, au taux annuel de 3,25%. On souhaite disposer de 2 400 € dans 3 ans.

1. (a) Déterminer la somme S_1 dont on dispose aujourd'hui sur le compte épargne, intérêts compris.
(b) Déterminer le montant des intérêts perçus au bout de 4 ans.
2. Déterminer la somme S_2 qu'il faut déposer aujourd'hui sur le compte épargne pour disposer, sur ce même compte 2 400 € dans 3 ans.

■ EXERCICE 6

Monsieur Alibert a emprunté, à intérêts composés, 25 000 € pour une durée de 3 ans. À l'échéance, il devra rembourser 29 775,40 €.
Déterminer le taux de l'emprunt.

■ EXERCICE 7

On remplace 4 règlements : 1 000 € dans un an, 3 000 € dans 3 ans, 3 510 € dans 5 ans, 2 000 € dans 6 ans, par deux règlements égaux, l'un dans un an, l'autre dans deux ans.

Le taux étant de 6%, quel est le montant de ces deux règlements ?

■ EXERCICE 8

20 000 € sont placés à intérêts composés, pendant un an. On retire alors 15 000 €.
Un an après ce retrait on dispose de 7 128 €.

Déterminer le taux de capitalisation.

2 Valeur acquise d'une suite d'annuités constantes

Lorsqu'on constitue un capital en plaçant pendant n années, à la fin de chaque année, la même somme, d'un montant de a euros, sur un compte épargne rémunéré au taux annuel de $t\%$, avec intérêts composés, le capital constitué le jour du versement de la dernière annuité est la valeur acquise de la suite d'annuités constantes.

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{avec } i = \frac{t}{100}$$

■ EXERCICE 9

Un suite de 10 annuités constantes a une valeur acquise de 73 124,38 €. Le taux de capitalisation étant de 8,2%, déterminer le montant de l'annuité.

■ EXERCICE 10

Déterminer la valeur acquise par une suite de 15 annuités constantes égales à 4 200 euros dans le cas d'un placement à intérêts composés, avec un intérêt annuel de 3,5%.

■ EXERCICE 11

Un capital de 30 000 € a été constitué par le versement de 12 annuités constantes capitalisées au taux de 4%.

Déterminer le montant de l'annuité constante.

■ EXERCICE 12

Des annuités constantes de 5 000 € chacune ont une valeur acquise de 37 380,15 € au bout de n années. Le taux de capitalisation est de 8,75%. Déterminer la valeur de n .

3 Emprunts à annuités constantes

Le montant en euros, a , de chacune des n annuités dans le cas d'un emprunt à annuités constantes de E euros, avec un taux d'intérêts annuel de $t\%$ est :

$$a = E \times \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \quad \text{avec } i = \frac{t}{100}$$

■ EXERCICE 13

On emprunte 100 000 €, pour acheter un logement, au taux d'intérêt annuel de 1,25% sur 25 ans. Cet emprunt est à annuités constantes.

1. Calculer le montant des annuités. *Arrondir au centime d'euro.*
2. Calculer le montant total des intérêts versés à l'organisme de crédit au bout de 25 ans, c'est-à-dire le coût du crédit.

■ EXERCICE 14

On rembourse une dette au moyen d'annuités constantes.

1. Déterminer le montant de l'annuité pour un capital de 350 000 €, sur 15 ans avec un taux de 4%.
2. S'il s'agit de remboursements d'un prêt souscrit pour l'achat d'un immeuble, quel est le prix total payé au bout de 15 ans ?

■ EXERCICE 15

On se propose d'emprunter 100 000 € le 2 janvier pour acheter un logement. Le taux d'intérêt annuel varie suivant la durée du prêt. Le remboursement se fait par annuités constantes divisées chacune en 12 mensualités égales. Pour chacune des durées possibles, calculer le montant de la mensualité et le montant total des intérêts versés à l'organisme de crédit à l'échéance, c'est-à-dire le coût du crédit.

Durée	Taux	Montant de la mensualité	Coût du crédit
10 ans	2,10%		
15 ans	2,40%		
20 ans	2,70%		

■ EXERCICE 16

Un banquier propose des prêts sur 10 ans au taux annuel de 3,93%, tous frais inclus. Le remboursement se fait par annuités constantes, divisées chacune en 12 mensualités égales.

Combien peut-on emprunter si on veut que chaque mensualité soit égal à 500 € ?

4 Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes

Lorsqu'un revenu est constitué d'un versement de a euros, à la fin de chaque année, pendant n années, au lieu de disposer de ce revenu dans les années à venir, on peut vouloir disposer immédiatement de la valeur actuelle de la suite de ces annuités constantes, au taux d'actualisation de t %.

$$V_A = a \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad \text{avec } i = \frac{t}{100}$$

■ EXERCICE 17

Déterminer la valeur actuelle au taux d'actualisation de 4% d'une suite d'annuités constantes de 1 500 € versées à la fin de chaque année pendant sept ans.

■ EXERCICE 18

Un organisme financier propose deux rentes versées en fin d'année, l'une de 2 000 € pendant cinq ans, l'autre de 1 200 € pendant 9 ans.

Comparer les valeurs actuelles de ces deux rentes au taux d'actualisation de 4,8%.

■ EXERCICE 19

Calculer la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes toutes égales à 1 200 € versées à la fin de chacune des 9 prochaines années, au taux d'intérêt annuel de 9%.

■ EXERCICE 20

Déterminer le nombre d'annuités toutes égales à 2 500 €, versées à la fin de chaque année, au taux d'intérêt annuel de 9,25% afin que la valeur actuelle de l'ensemble soit de 9 661,38€.

■ EXERCICE 21

Calculer le montant de chacune des six annuités constantes, versées à la fin de chacune des six prochaines années au taux d'intérêt annuel de 7% pour que la valeur actuelle soit égal à 5 719,85 €.

■ EXERCICE 22

Une personne âgée de 30 ans a placé un capital de 20 000 € à 7%.
À partir de 50 ans, elle retire 1 000 € à la fin de chaque année.
Que laissera cette personne à ses héritiers si elle meurt à 60 ans, après avoir effectué son retrait ?

■ EXERCICE 23

Quelle somme peut-on placer à la fin de chaque année durant 10 ans pour que l'on puisse par la suite recevoir 2 000 € au début de chaque année durant les cinq prochaines années au taux annuel de 6% ?

■ EXERCICE 24

Calculer la valeur actuelle d'une dette qui doit être payée d'abord en cinq versements annuels de 1 000 €, puis en cinq autres versements annuels de 2 000 €, si le taux d'intérêt annuel est de 12%.

■ EXERCICE 25

Une suite de 12 annuités est constituée de trois annuités de 1 000 € chacune, quatre annuités de 2 000 € chacune, et cinq annuités de 3 000 € chacune.

Calculer la valeur acquise et la valeur actuelle des 12 annuités au taux d'intérêt annuel de 12%.

■ EXERCICE 26

Une personne a versé dans une banque une somme de 6 000 € par an, le 1^{er} janvier de chaque année pendant 10 ans, la première a été versée le 1^{er} janvier 1997, la dernière le 1^{er} janvier 2006. Puis, pendant dix ans, elle a retiré la même somme de 6 000 €, la première a été retirée le 1^{er} janvier 2007, la dernière le 1^{er} janvier 2016. Calculer l'avoir de cette personne dans la banque au 31 décembre 2016 en tenant compte des intérêts composés au taux annuel de 5%.

CORRECTION

1 Intérêts, valeur acquise, valeur actuelle

■ EXERCICE 1

$$C_{10} = 2\,000 + 10 \times 2\,000 \times 0,0341 = 2\,682$$

■ EXERCICE 2

$$C_8 = 2\,650 \times 1,015^8 \approx 2\,985,21$$
$$I = 2\,985,21 - 2\,650 = 335,21$$

■ EXERCICE 3

$$\text{On résout l'équation : } 10\,816 = 10\,000 \times (1+t)^2$$

$$\text{On trouve } t = 0,04 = 4\%.$$

■ EXERCICE 4

1. On résout $6\,000 = C_0 \times 1,0325^7$, on trouve $C_0 = 4\,796,46$.
2. On résout $20\,000 = C_0 \times 1,015^{10}$, on trouve $C_0 = 17\,233,34$.

■ EXERCICE 5

1. (a) $S_1 = 1\,500 \times 1,0325^4 = 1\,704,71$
(b) $I = 1\,704,71 - 1\,500 = 204,71$
2. $2\,400 \times 1,0325^{-3} - 1\,704,71 = 475,71$

■ EXERCICE 6

$$\text{On résout l'équation } C_n = C_0(1+t)^n \text{ soit } 29\,775,40 = 25\,000(1+t)^3$$
$$\text{On trouve } t \approx 6\%$$

■ EXERCICE 7

On cherche les valeurs acquises des annuités au bout des 6 ans :

$$1\,000 \times 1,06^5 + 3\,000 \times 1,06^3 + 3\,510 \times 1,06 + 2\,000 = 10\,631,87.$$

On résout alors l'équation : $C \times 1,06^5 + C \times 1,06^4 = 10\,631,87$ et on trouve $C = 4\,088,08$.

■ EXERCICE 8

Il faut résoudre l'équation : $(20\,000(1+t) - 15\,000)(1+t) = 7\,128$.
On arrive à $20\,000t^2 + 25\,000t - 2\,128 = 0$ dont les solutions sont -133% et 8% .
On retient 8% .

2 Valeur acquise d'une suite d'annuités constantes

■ EXERCICE 9

$$a = 73\,124,38 \times \frac{0,082}{1,082^{10} - 1} \approx 5\,000$$

■ EXERCICE 10

$$V_{15} = 4\,200 \times \frac{1,035^{15} - 1}{0,035} = 81\,041,86$$

■ EXERCICE 11

$$\text{On résout l'équation : } 30\,000 = a \times \frac{1,04^{12} - 1}{0,04}, \text{ on trouve } a = 1\,996,57$$

■ EXERCICE 12

$$\text{On résout l'équation : } 37\,380,15 = 5\,000 \times \frac{1,0875^n - 1}{0,0875}, \text{ on trouve } n = 6.$$

3 Emprunts à annuités constantes

■ EXERCICE 13

- $a = 100\,000 \times \frac{0,0125}{1 - 1,0125^{-25}} = 4\,682,25$
- $I = 25 \times 4\,682,25 - 100\,000 = 17\,056$

■ EXERCICE 14

- $a = 350\,000 \times \frac{0,04}{1 - 1,04^{-15}} = 31\,479,39$
- $15 \times 31\,479,39 = 472\,190,78$

■ EXERCICE 15

Durée	Taux	Montant de la mensualité	Coût du crédit
10 ans	2,10%	932,58	11 909,80
15 ans	2,40%	668,11	20 260,26
20 ans	2,70%	544,71	30 730,51

■ EXERCICE 16

L'annuité est de 6 000 euros. (500×12).

On résout l'équation $6\,000 = E \times \frac{0,0393}{1 - 1,0393^{-10}}$

On trouve $E = 48\,835,40$

4 Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes

■ EXERCICE 17

$$V_A = 1\,500 \times \frac{1 - 1,04^{-7}}{0,04} = 9\,003,08$$

■ EXERCICE 18

$$V_{A_1} = 2\,000 \times \frac{1 - 1,048^{-5}}{0,048} = 8\,707,04$$

$$V_{A_2} = 1\,200 \times \frac{1 - 1,048^{-9}}{0,048} = 8\,605,87$$

■ EXERCICE 19

$$V_A = 1\,200 \times \frac{1 - 1,09^{-9}}{0,09} = 7\,194,30$$

■ EXERCICE 20

On résout l'équation : $9\,661,38 = 2\,500 \times \frac{1 - 1,0925^{-n}}{0,0925}$. On trouve $n = 5$.

■ EXERCICE 21

On résout l'équation : $5\,719,85 = a \times \frac{1 - 1,07^{-6}}{0,07}$ d'où $a \approx 1200$.

■ EXERCICE 22

Le capital (aux 50 ans) est $20\,000 \times 1,07^{20} = 77\,393,69$

La valeur actuelle (aux 50 ans) des retraits de 1 000 € est :

$$1\,000 \times \frac{1 - 1,07^{-10}}{0,07} = 7\,023,58$$

Le capital acquis (aux 60 ans) est : $(77\,393,69 - 7\,023,58) \times 1,07^{10} = 138\,428,65$.

■ EXERCICE 23

On résout l'équation : $a \times \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} = 2\,000 \times \frac{1 - 1,06^{-5}}{0,06}$.

On trouve $a \approx 639,17$.

■ EXERCICE 24

$$V_1 = 1\,000 \times \frac{1 - 1,12^{-5}}{0,12} \approx 3\,604,78$$

$$V_2 = 2\,000 \times \frac{1 - 1,12^{-5}}{0,12} \times 1,12^{-5} \approx 4\,090,89$$

$$V_a = V_1 + V_2 \approx 7\,695,67.$$

■ EXERCICE 25

On calcule la valeur actuelle des 3 premières annuités :

$$V_1 = 1\,000 \times \frac{1 - 1,12^{-3}}{0,12} = 2\,401,83$$

On calcule la valeur actuelle des 4 annuités suivantes :

$$V_2 = 2\,000 \times \frac{1 - 1,12^{-4}}{0,12} \times 1,12^{-3} = 4\,323,85$$

On calcule la valeur actuelle des 5 annuités suivantes :

$$V_3 = 3\,000 \times \frac{1 - 1,12^{-5}}{0,12} \times 1,12^{-7} \approx 4\,891,85$$

La valeur actuelle est $V_1 + V_2 + V_3 = 11\,617,53$

La valeur acquise est $11\,617,53 \times 1,12^{12} \approx 45\,261,62$.

■ EXERCICE 26

La valeur acquise au 1^{er} janvier 2006 des premiers versements est :

$$V_a = 6\,000 \times \frac{1 - 1,05^{-10}}{0,05} \approx 46\,330,41.$$

Le 31 décembre 2006, la valeur des versements est : $46\,330,41 \times 1,05 \approx 48\,646,93$.

La valeur actuelle au 31 décembre 2006 des retraits de 6 000 € est :

$$6\,000 \times \frac{1 - 1,05^{-10}}{0,05} \approx 46\,330,41.$$

La valeur acquise au 31 décembre 2016 est donc :

$$(48\,646,93 - 46\,330,41) \times 1,05^{10} \approx 3\,773,37.$$

5 Emprunts et amortissement

■ EXERCICE 27

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Capital restant dû
1	50 000	5 000	8 189,87	13 189,87	41 810,13
2	41 810,13	4 181,01	9 008,86	13 189,87	32 801,27
3	32 801,27	3 280,13	9 909,74	13 189,87	22 891,53
4	22 891,53	2 289,15	10 900,72	13 189,87	11 990,81
5	11 990,81	1 199,08	11 990,79	13 189,87	0

■ EXERCICE 28

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette
1	200 000	24 000	16 260,57	40 260,57	183 739,43
2	183 739,43	22 408,73	18 211,84	40 260,57	165 527,60
...
8	35 946,94	4 313,63	35 946,94	40 260,57	0

■ EXERCICE 29

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette
1	100 000	9 000	30 505,48	39 505,48	69 494,52
2	69 494,52	6 254,51	33 250,97	39 505,48	36 243,56
3	336 243,56	3 261,92	36 243,56	39 505,48	0

■ EXERCICE 30

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette
1	150 000	9 000	21 504,39	30 504,39	128 495,61
2	128 495,61	7 709,74	22 794,66	30 504,39	105 700,95
...
6	28 777,73	1 726,66	28 777,73	30 504,39	0

■ EXERCICE 27

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette
1	150 000	10 500	26 083,60	36 583,60	123 916,40
2	123 916,40	8 674,15	27 909,46	36 583,60	96 006,94
...
5	34 190,28	2 393,32	34 190,28	36 583,60	0

Le montant des intérêts avec la BNP est 32 918,02 € alors qu'à la CIC il est de 33 026,37 €.

Mieux vaut choisir la BNP dans ce cas.