33 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

Utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$ et majorée par 5.

33. Sois $P(n)$ la proposition " pour tout entier n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 5$. "

Initialisation $n=0$ $u_{n+1} = \frac{-1}{2} \times 5 + 3 = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq 5$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier n.

$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 5$

$\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}u_n \geq 5 \times -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{4} + 3 \geq -\frac{1}{2}u_n + 3 \geq \frac{-5}{2} + 3$

$\frac{11}{4} \geq u_{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

Conclusion : Pour tout entier n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 5$."