EVALUATION

■ Exercice 1 (7,5 points)

Éva et Léo visitent une usine de chocolat en Suisse. À la sortie de la visite, ils peuvent manger des truffes.
Les trois quarts des truffes offertes sont au chocolat noir, à forte teneur en cacao, les autres sont au praliné. Il y en a suffisamment pour que la probabilité de prendre une truffe au chocolat noir reste toujours égale à 0,75.

1. Un visiteur choisit 3 truffes et les mange une à une.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de truffes au chocolat noir choisies.
   (a) Reconnaître la loi suivie par X et donner ses paramètres. Préciser l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Dresser le tableau de la loi de probabilité suivie par X. Donner les probabilités exactes puis à 10^{-3} près.
   (c) Calculer $P(X \geqslant 2)$; en donner une interprétation.
   (d) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter.
2. (a) Léo préfère les truffes au praliné. Il prend (et mange !) 10 truffes et se plaint : « Toutes les truffes sont au chocolat noir ! » Quelle est la probabilité que cet événement se réalise ?
   (b) Sa soeur Éva choisit 6 truffes, mais elle est malade le lendemain si elle mange au moins 4 truffes au praliné. Quelle est la probabilité qu'Éva tombe malade ?

■ Exercice 2 (7,5 points)

Le cycle des feux tricolors aux carrefours est le suivant :

— V : « le feux est vert » dure 20 secondes ;
— O : « le feux est orange » dure 5 secondes ;
— R : « le feux est rouge » dure 35 secondes ;

1. Déterminer $P(V)$, $P(O)$ et $P(R)$.
2. Un automobiliste rencontre successivement trois feux tricolores fonctionnant de manière indépendante.
   Dresser un arbre pondéré illustrant la situation. *Ne pas indiquer les probabilités.*
3. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) A : « l'automobiliste rencontre trois feux verts ».
   (b) B : « l'automobiliste rencontre un feu vert, un feu rouge et un feu orange dans cet ordre ».
   (c) C : « l'automobiliste rencontre au moins deux feux verts ».

■ Exercice 3 (5 points)

Un QCM est composé de cinq questions numérotées de 1 à 5.
Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte.
Un candidat répond à ce QCM, en cochant, au hasard et de façon indépendante, chacune des 5 questions.
On décide de donner au candidat un point par réponse exacte.
Soit X la variable aléatoire associant aux réponses du candidat la note obtenue sur 5.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne la note maximale ?
3. Compléter la loi de probabilité de X en donnant les valeurs arrondies au millième :

Valeurs x_i	0	1	2	3	4	5
Probabilité p_i						

4. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne plus de la moyenne ?
5. Quelle note le candidat peut-il espérer obtenir (c'est-à-dire quelle note moyenne obtiendrait-il s'il remplissait au hasard un très grand nombre de QCM) ?

6. *Hors barème :*
   À partir de combien de canditats, répondant tous au hasard et de façon indépendante, a-t-on une probabilité supérieure à 99% d'avoir un candidat qui ait tout juste ?

CORRECTION

■ Exercice 1

1. (a) On répète de façon identique et indépendante 3 fois une expérience aléatoire ayant deux issues. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}75$. X suit la loi $\mathcal{B}\ (3\ ;\ 0{,}75)$.
   X peut prendre les valeurs : 0 ; 1 ; 2 et 3.

   (b)

Valeurs x_i	0	1	2	3
Probabilité p_i	$\binom{3}{0}0{,}75^0 \times 0{,}25^3$	$\binom{3}{1}0{,}75^1 \times 0{,}25^2$	$\binom{3}{2}0{,}75^2 \times 0{,}25^1$	$\binom{3}{3}0{,}75^3 \times 0{,}25^0$
Valeur approchée	0,016	0,141	0,422	0,422

   (c) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(x \leqslant 1) \approx 1 - 0{,}156 \approx 0{,}844$
   La probabilité d'obtenir au moins 2 truffes au chocolat noir lorsqu'on en choisit 3 est de 84,4% environ.

   (d) $E(X) = n \times p = 3 \times 0{,}75 = 2{,}25$
   Sur un grand nombre de tirages de 3 truffes, on obtient 2,25 truffes au chocolat noir en moyenne.

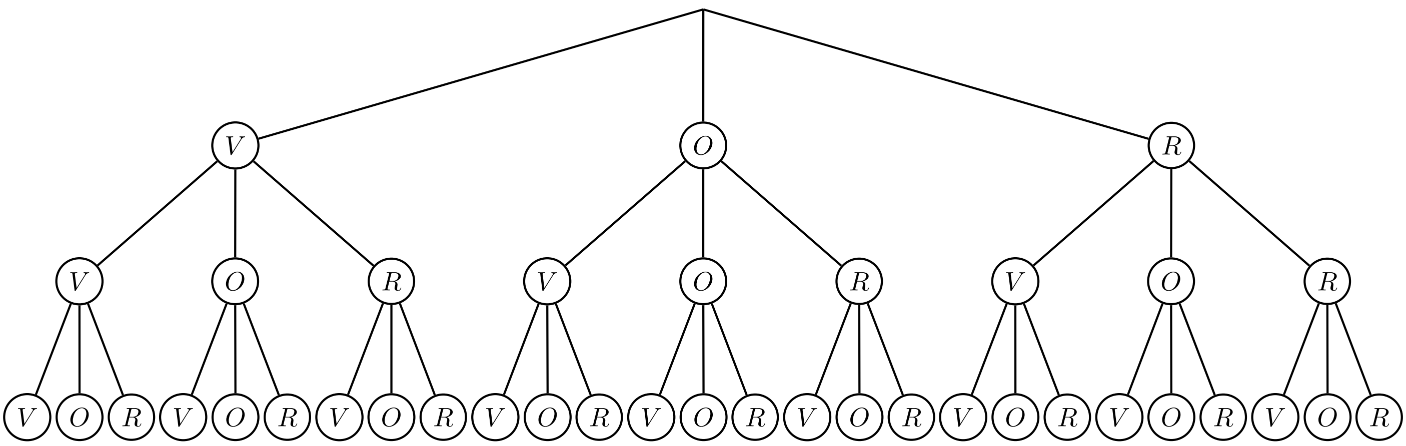
2. (a) On appelle Y la variable aléatoire associée au nombre de truffes au chocolat tirées au hasard parmi 10 truffes. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}\ (10\ ;\ 0{,}75)$.
   $P(Y = 10) = \binom{10}{10}0{,}75^{10} \times 0{,}25^0 \approx 0{,}056$.

   (b) On appelle Z la variable aléatoire associée au nombre de truffes au praliné tirées au hasard parmi 6 truffes. Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}\ (6\ ;\ \underline{0{,}25})$.
   $P(Z \geqslant 4) = 1 - P(Z \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}962 \approx 0{,}038$. Il y a environ 3,8% de chances qu'Éva tombe malade.

■ Exercice 2

1. $P(V) = \dfrac{20}{60} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad P(O) = \dfrac{5}{60} = \dfrac{1}{12}$ $\qquad P(R) = \dfrac{35}{60} = \dfrac{7}{12}$

2.



3. $P(A) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$

   $P(B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{7}{12} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{7}{432}$

   $P(C) = P(VVV) + P(OVV) + P(VOV) + P(VVO) + P(RVV) + P(VRV) + P(VVR)$

   $P(C) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{12} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{12} + \dfrac{7}{12} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{7}{12} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{7}{12}$

   $P(C) = \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{108} + \dfrac{1}{108} + \dfrac{1}{108} + \dfrac{7}{108} + \dfrac{7}{108} + \dfrac{7}{108}$

   $P(C) = \dfrac{7}{27} \approx 0{,}26$

   <u>Autre façon nettement plus rapide</u> :
   <u>Considérer la variable aléatoire X</u> comptant le nombre de feux verts et montrer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\ (3\ ;\ \dfrac{1}{3})$ d'où le résultat, en calculant $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) \approx 1 - 0{,}741 \approx 0{,}26$.

■ Exercice 3

1. On répète de façon identique et indépendante 5 fois une expérience aléatoire ayant deux issues.
   X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$: X suit la loi $\mathcal{B}\,(5\,;\,0{,}25)$.
2. $P(X = 5) = \dbinom{5}{5} 0{,}25^5 \times 0{,}75^0 \approx 0{,}001$
   La probabilité d'obtenir au hasard 5 bonnes réponses est de 0,1% environ.
3.

Valeurs x_i	0	1	2	3	4	5
Probabilité p_i	0,237	0,396	0,264	0,088	0,015	0,001

4. À la calculatrice, on trouve $P(X \geqslant 3) \approx 0{,}104$
   La probabilité d'obtenir plus de la moyenne est de 10,4% environ.
5. $E(X) = n \times p = 5 \times 0{,}25 = 1{,}25$
   Sur un grand nombre de QCM de 5 questions, on obtient 1,25 bonnes réponses en moyenne.
6. On appelle n le nombre de candidats.
   Y est la variable aléatoire associée au nombre de candidat ayant 5 bonnes réponses.
   Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}001$.
   La probabilité de n'avoir aucun candidat avec 5 bonnes réponses est :
   $P(Y = 0) = \dbinom{n}{0} \times 0{,}001^0 \times 0{,}999^n = 0{,}999^n$
   La probabilité d'avoir au moins un candidat avec 5 bonnes réponses est la probabilité contraire donc :
   $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}999^n$

   On veut donc $1 - 0{,}999^n > 0{,}99$
   À l'aide de la calculatrice, on trouve $n \geqslant 4\,603$
   Il faut au moins 4 603 candidats pour avoir plus de 99% de chances qu'il y en est au moins un qui ait répondu correctement tout juste.