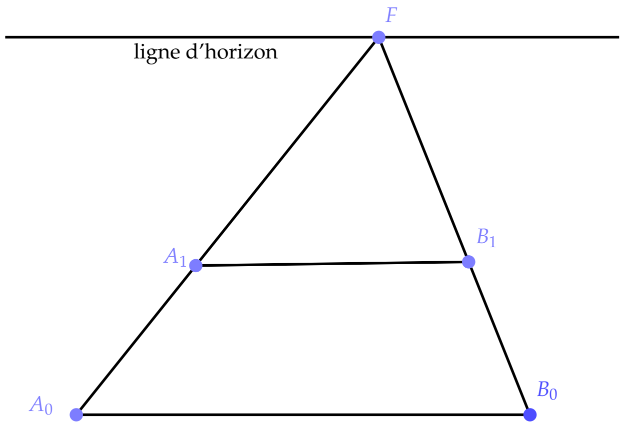
Perspective

Exercice [19]

On s'intéresse au dessin en perspective centrale d'une route rectiligne de longueur infinie, sur laquelle on aurait planté des arbres à intervalles réguliers.

1 Construction géométrique



On a représenté la route filant jusqu'à la ligne d'horizon et l'emplacement des deux premiers arbres A_0 et A_1 sur le bord de celle-ci. Les segments traversants $[A_0, B_0]$ et $[A_1, B_1]$ sont dans un plan frontal à l'observateur et donc ne sont pas soumis à des points de fuite.

Les troisième arbre A_2 est tel que le parallélogramme $A_0A_2B_2B_0$ a ses diagonales qui se coupent à la hauteur de A_1.

1. Tracer le milieu M_1 de $[A_1, B_1]$ et en déduire une construction de A_2.
2. Par la même méthode, tracer les points A_3, A_4 et A_5.

2 Etude analytique

Posons $FA_2 = a$, $FA_1 = m$ et $FA_0 = b$.
On va montrer que m est la moyenne harmonique de a et b, c'est-à-dire $\frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

1. Donner une expression de $\frac{A_0A_1}{A_0A_2}$ en utilisant le théorème de Thalès dans $A_0A_2B_2$.
2. En déduire une expression de ce quotient en fonction de $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}$.
3. En déduire enfin une expression de ce quotient en fonction de FA_1 et FA_2 en utilisant le théorème de Thalès dans FA_0B_0.
4. Montrer que l'on a $\frac{b-m}{b-a} = \frac{1}{2}\frac{m}{a}$.
5. En déduire enfin que m est la moyenne harmonique de a et b.

3 Suite harmonique

On considère maintenant la suite (x_n) des distances du point de fuite F aux points A_n.
On donne $x_0 = FA_0 = 1$ et $x_1 = FA_1 = \frac{1}{2}$.

1. Calculer les valeurs de x_2, x_3 et x_4.
2. En supposant que $x_n = \frac{1}{n+1}$ et $x_{n-1} = \frac{1}{n}$ pour une valeur n strictement positive, démontrer que $x_{n+1} = \frac{1}{n+2}$. Conclure.
3. Représenter cette route avec GeoGebra en dessinant les 50 premiers arbres. On pourra utiliser la commande `Séquence`.