Exemples d'équations de la forme ax+by=c ; a , b , c entiers

Détermination du pGCD à l'aide de l'équation diophantienne.

Application :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $a = 11n + 3$ et $b = 13n - 1$

1) Montrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$(E) : 50x - 11y = 3$

b) En déduire pour quelles valeurs de n, on a $a \wedge b = 50$.

3) Pour quelles valeurs de n, $a \wedge b = 25$

Rep :

1) $\begin{cases} d \mid 11n+3 \\ d \mid 13n-1 \end{cases} \Rightarrow d \mid 13(11n+3) - 11(13n-1)$

$\Rightarrow \boxed{d \mid 50}$

TakiAcademy
www.takiacademy.com

2) a) En utilisant L'algorithme d'euclide, on vérifie que $(6,27)$ est solution de $50x - 11y = 3$

$\Rightarrow 50x - 11y = 50\times 6 - 11\times 27$

$\Rightarrow 50(x-6) = 11(y-27)$

$\Rightarrow 50 \mid 11(y-27)$ or $50 \wedge 11 = 1$

$\Rightarrow 50 \mid y-27 \Rightarrow \boxed{y = 27 + 50k \;,\; k\in\mathbb{N}}$

D'où $50(x-6) = 11(50k)$

$\Rightarrow \boxed{x = 11k + 6 \;;\; k\in\mathbb{N}}$

Vérification :

$50(6+11k) - 11(27+50k) = 1$

D'où

$$\boxed{S_{\mathbb{N}^2} = \{(6+11k\,;\,27+50k)\,;\,k\in\mathbb{N}\}}$$

b) $a\wedge b = 50 \Leftrightarrow$ il existe $(a',b')\in\mathbb{N}^2$ tq $a = 50a'$, $b = 50b'$ et $a'\wedge b' = 1$

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Ainsi $a = 11n + 3 = 50a' \Leftrightarrow 50a' - 11n = 3$

$\Rightarrow n = 50k + 27 ; k \in \mathbb{N}$

d'où $a = 11(50k + 27) + 3 = 50(11k + 6)$

et $b = 50(13k + 7)$

on vérifie que $(11k + 6) \wedge (13k + 7) = 1$

$\boxed{\text{(en effet } 13(11k+6) - 11(13k+7) = 1 \text{)}}$

3) $a \wedge b = 25$

$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 1 \ [2] \\ a \equiv 0 \ [25] \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} 11n + 3 \equiv 1 \ [2] \\ 11n + 3 \equiv 0 \ [25] \end{cases}$

$\overset{2}{\Rightarrow} \begin{cases} n \equiv 0 \ [2] \\ 11n + 3 \equiv 0 \ [25] \end{cases} \overset{3}{\Rightarrow} \begin{cases} n = 2k , \ k \in \mathbb{N} \\ 22k + 3 \equiv 0 \ [25] \end{cases}$

$\overset{4}{\Rightarrow} \begin{cases} n = 2k \ ; k \in \mathbb{N} \\ 22k + 3 - 25 \equiv 0 \ [25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2k \\ 22(k-1) \equiv 0 \ [25] \end{cases}$

TakiAcademy
www.takiacademy.com

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 2k \ ; \ k \in \mathbb{N} \\ k \equiv 1 [25] \end{cases} \quad \boxed{\text{Car } 22 \wedge 25 = 1}$$

et dans ce cas :

$a = 11 \times 2(25k+1) + 3 = 25(22k+1)$

et $b = 13 \times 2(25k+1) - 1 = 25(26k+1)$

et $(22k+1) \wedge (26k+1) = 1$.

$\boxed{\text{en effet} :}$ Soit $\Delta = (22k+1) \wedge (26k+1)$

$$\begin{cases} \Delta \mid 22k+1 \\ \Delta \mid 26k+1 \end{cases} \Rightarrow \Delta \mid 4 \Rightarrow \Delta \in \{1, 2, 4\}$$

or $22k+1$ et $26k+1$ sont impairs

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = 1}$$