Asie 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (7 points) (commun à tous les candidats)

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
L'unité graphique est 1 cm.

1) Etude des limites

a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.

b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?

2) Etude des variations de la fonction f

a) Démontrer que la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Partie B Etude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\,dx.$$

1) Calculer I_2.

2) Une relation de récurrence

a) Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x de $[1;2]$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}$.
Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et tout réel x de $[1;2]$,

$$f'_{n-1}(x) = -(n-1)f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$

c) Calculer I_3.

3) Etude de la limite de la suite de terme général I_n

a) Etablir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,2]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{e}{x^n}.$$

b) En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).

