Les suites en Terminale ES

Fiche Résumé

10 août 2016

1 Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

1.1 Suites arithmétiques

DÉFINITION *Suites arithmétiques*

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre réel $\boldsymbol{r}$ tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \quad u_{n+1} = u_n + r\,.}$$

« r » est alors appelée la **raison** de la suite.

PROPRIÉTÉ *Formule explicite d'un terme d'une suite arithmétique*

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r}$. Alors :

- Pour une suite arithmétique de premier terme $\boldsymbol{u_0}$ et de raison $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{u_n = u_0 + nr} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- si le premier terme est $\boldsymbol{u_1}$:

$$\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Plus généralement :

$$\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p) \times r}$$

terme de rang $\boldsymbol{n}$ = **terme de rang** $\boldsymbol{p}$ + (**écart entre les rangs**) × (**raison**).

PROPRIÉTÉ *Sens de variation d'une suite arithmétique*

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

- Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante ;
- Si $r = 0$, la suite est constante, égale à son premier terme ;
- Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.

PROPRIÉTÉ *Somme des n premiers entiers*

La somme des n premiers entiers naturels non nuls est :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

PROPRIÉTÉ *Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique*

- Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r :

$$u_0+u_1+\ldots+u_n=(n+1)\times\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)\qquad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

- Pour une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r :

$$u_1+\ldots+u_n=n\times\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)\qquad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

- Plus généralement :

$$S_n=\textbf{nombre de termes}\times\left(\frac{\textbf{premier terme}+\textbf{dernier terme}}{2}\right).$$

1.2 Suites géométriques

DÉFINITION *Suites géométriques*

Une suite (v_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \quad v_{n+1}=v_n\times q\,.}$$

q est appelée **la raison** de la suite géométrique.

PROPRIÉTÉ *Formule explicite d'un terme d'une suite géométrique*

- Pour une suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison q :

$$v_n=v_0\times q^n\,;\qquad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

- si le premier terme est v_1 :

$$v_n=v_1\times q^{n-1}\,;\qquad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

- Plus généralement :

$$v_n=v_p\times q^{n-p}$$
$$\textbf{terme de rang } n=(\textbf{terme de rang } p)\times\textbf{raison}^{(\textbf{écart entre les rangs})}.$$

Propriété

Sens de variation d'une suite géométrique

(v_n) est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q > 0}$ et de premier terme $\boldsymbol{v_0}$.

	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$v_0 > 0$	strictement décroissante	constante	strictement croissante
$v_0 < 0$	strictement croissante	constante	strictement décroissante

Propriété

Limite d'une suite géométrique

(v_n) est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q > 0}$ et de premier terme $\boldsymbol{v_0}$.

	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$v_0 > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_0 \times q^n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_0 \times q^n = v_0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_0 \times q^n = +\infty$
$v_0 < 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_0 \times q^n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_0 \times q^n = v_0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_0 \times q^n = -\infty$

Propriété

Somme des premières puissances d'un réel $q \neq 1$

La somme des premières puissance d'un nombre réel $q \neq 1$ vaut :

$$\boldsymbol{1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$$

Propriété

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$

- Pour une suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{v_0}$ et de raison $\boldsymbol{q \neq 1}$:

$$\boldsymbol{v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- Pour une suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{v_1}$ et de raison $\boldsymbol{q \neq 1}$:

$$\boldsymbol{v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Plus généralement :

$$\boldsymbol{S_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - (\text{raison})}}.$$

2 Suites arithmético-géométriques

Définition *Suite arithmético-géométrique*

Une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque *Étude d'une suite arithmético-géométrique*

L'étude d'une suite arithmético-géométrique (u_n) introduit souvent **une suite auxiliaire** (v_n), en demandant de montrer que cette dernière est géométrique.

Exemple : soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 20\,000 \\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1\,000 \end{cases}$$

Soit alors la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$v_n = u_n - 10\,000 \textit{ (\textbf{suite auxiliaire})}. \tag{1}$$

1. **La suite (v_n) est géométrique.**

   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10\,000 \\ &= 0,9u_n - 9\,000 \\ &= 0,9(u_n - 10\,000) \\ v_{n+1} &= 0,9v_n \end{aligned}$$

2. **Expression du terme général u_n.**

   (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme :

   $$v_0 = u_0 - 10\,000 = 10\,000.$$

   Donc,

   $$v_n = v_0 \times q^n = 10\,000 \times 0,9^n\,,$$

   et donc , d'après l'équation (1) :

   $$\begin{aligned} u_n &= v_n + 10\,000 \\ u_n &= 10\,000 \times 0,9^n + 10\,000. \end{aligned}$$

3. **Limite de la suite (u_n).**

   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car (v_n) est géométrique de raison $0 < q < 1$.

   Donc,

   $$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} (v_n + 10\,000) \\ &= \lim_{n\to+\infty} v_n + 10\,000 \\ &= 10\,000. \end{aligned}$$