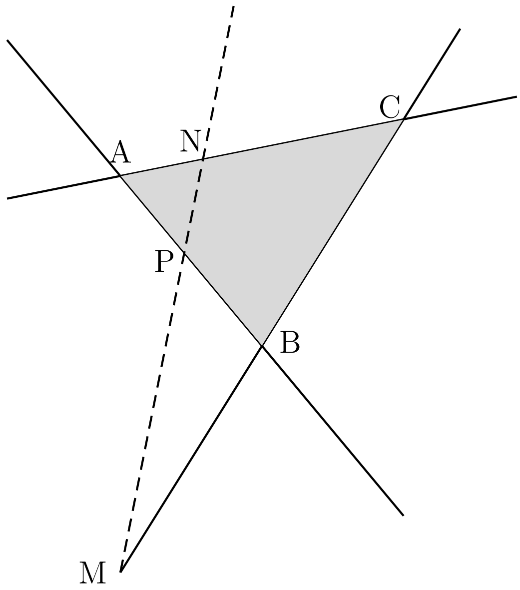
Exercice 1 Le théorème de Ménélaüs

On considère un triangle ABC.
M, N et P sont trois points situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB) et distincts des points A, B et C. On cherche à déterminer une condition nécessaire et suffisante d'alignement des points M, N et P.



Dans tout l'exercice, le plan est muni du repère $(\mathrm{A},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$.

1. Justifier l'existence d'un réel a tel que $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = a\overrightarrow{\mathrm{PB}}$, d'un réel b tel que $\overrightarrow{\mathrm{NC}} = b\overrightarrow{\mathrm{NA}}$, et d'un réel c tel que $\overrightarrow{\mathrm{MB}} = c\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.

2. Justifier que a, b et c sont différents de 1.

3. **a)** Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{1-c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \dfrac{c}{1-c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

b) En déduire les coordonnées du point M.

4. **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

b) En déduire les coordonnées du point P et montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{ac-1}{(1-a)(1-c)}\ ;\ \frac{c}{1-c}\right)$$

5. **a)** Déterminer les coordonnées de N.

b) En déduire que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{a}{1-a}\ ;\ \frac{1}{1-b}\right)$$

6. Démontrer que les points M, N et P sont alignés si, et seulement si, $abc = 1$.

Exercice 2 **Un faisceau de droites**

Soit a un réel. On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 + 5x + 5$ et l'ensemble (d_a) des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$(2a+1)x - (a+1)y + 1 = 0$$

On cherche à étudier l'intersection de $\mathscr{P}$ et de (d_a).

1. Justifier que, pour tout réel a, l'ensemble (d_a) est une droite.
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer le nombre de points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de (d_a) en fonction des valeurs de a.

2. On suppose dans cette question que $a = -1$.

a) Déterminer une équation de la droite (d_{-1}).

b) En déduire que $\mathscr{P}$ et (d_{-1}) se coupent en un unique point que l'on déterminera.

3. On suppose désormais que $a \neq -1$.

a) Écrire l'équation de (d_a) sous la forme $y = mx + p$.

b) En déduire qu'un point du plan est un point d'intersection de $\mathscr{P}$ et de (d_a) si, et seulement si, son abscisse est solution de l'équation du second degré (E_a) :

$$x^2 + \frac{3a+4}{a+1}x + \frac{5a+4}{a+1} = 0$$

c) Calculer le discriminant Δ_a de l'équation (E_a) et vérifier l'égalité $\Delta_a = \dfrac{-a(11a+12)}{(a+1)^2}$.

d) Étudier le signe de Δ_a en fonction des valeurs de a.

4. En déduire le nombre de points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de (d_a) suivant les valeurs de a.

Exercice 3 On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
        n , k et P sont des entiers naturels non nuls.
Entrée
        Saisir n
Initialisation
        Affecter à P la valeur 1
Traitement
        Pour k variant de 1 à n
                Affecter à P la valeur P × k
        Fin Pour
Sortie
        Afficher P
```

1. Faire tourner cet algorithme à la main en prenant $n = 4$ puis $n = 6$ (dresser un tableau avec toutes les étapes). Quels sont les résultats obtenus ? Quel est le rôle de cet algorithme ?

2. Programmer cet algorithme en langage Python. Exécuter ce programme pour $n = 6$ puis pour $n = 15$. Quels sont les résultats obtenus ?

Le fichier **prenomNom1S1algo1.py** sera envoyé à l'adresse **dominique.lemalade@ac-versailles.fr** avant le mardi 03/11/2015.