Devoir Maison – Dérivée

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle dérivée seconde de f, noté $f^{(2)}$, la fonction dérivée de la fonction dérivée f'. On définit par itération la dérivée $n$ième de f, notée $f^{(n)}$, la dérivée de la dérivée $(n-1)$ième.

Définition : la dérivée de f est donc la dérivée première que l'on peut noter $f^{(1)}$. Et par notation $f^0 = f$.

Définition : Soit n un nombre entier naturel non nul, on appelle factoriel n, noté $n!$, le nombre

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$$

Par convention $0! = 1$

Exemple : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Partie 1

1. Soit la fonction polynôme $P : x \mapsto x^2 - 3x + 1$. Calculer $P^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cap [0;3]$
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$P(x) = \sum_{i=0}^{2} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} x^i$$
3. Soit la fonction polynôme $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont quatres nombres réels. Calculer $P^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cap [0;4]$
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$P(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

Partie 2 On considère dans cette partie la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et la fonction polynôme P définit sur tout $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

1. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cap [0;3]$
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$
3. Avec un logiciel, par exemple *Geogebra*, tracer les courbes des fonctions f et P sur l'intervalle $[-1;1]$. Que constate-t-on ? (si vous pouvez imprimer votre tracer, joignez le à votre copie)
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) - P(x) = \frac{x^4}{1-x}$$
5. Démontrer que pour tout $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$,
$$|f(x) - P(x)| \leq 2x^4$$
6. En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0} |f(x) - P(x)|$