

## ~ CORRECTION BACCALAURÉAT S LIBAN 28 MAI 2013 ~

### EXERCICE 1

(4 points)

#### Question 1 :

##### Réponse d

Un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$  est le vecteur  $\vec{d}(1, 2, 3)$ , un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}'$  est le vecteur  $\vec{d}'(1, 1, -1)$ .  $\vec{d} \cdot \vec{d}' = 1 + 2 - 3 = 0$ .

Ces deux vecteurs sont orthogonaux, les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont donc orthogonales.

Aussi par élimination : la a. est fausse car les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, b. est fausse car il n'y a pas de point d'intersection et c. est fausse car C n'est pas sur D.

#### Question 2 :

##### Réponse c

Un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$  est le vecteur  $\vec{n}(1, 1, -1)$ .

Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}'$ .

Ce qui entraîne que ce plan est orthogonal à la droite  $\mathcal{D}'$ .

#### Question 3 :

##### Réponse c

$$AB = \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}, \quad AC = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}, \quad BC = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56}$$

Ces trois distances sont égales, il en résulte que le triangle ABC est équilatéral.

#### Question 4 :

##### Réponse b

Pour déterminer lequel de ces vecteurs est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}'$ , il suffit de vérifier si ces vecteurs sont orthogonaux à deux vecteurs de  $\mathcal{P}'$  qui sont non colinéaires.

Prenons  $\vec{d}'(1, 1, -1)$  et  $\vec{u} = \overrightarrow{AD'}$ , où A(1, -1, 2) et D' est un point de  $\mathcal{D}'$ , par exemple celui de coordonnées (1, 3, 4), soit  $\overrightarrow{AD'}(0, 4, 2)$ .

On vérifie que  $\vec{d}'$  et  $\overrightarrow{AD'}$  ne sont pas colinéaires, et on constate que, dans le second cas :

$$\vec{d}' \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AD'} \cdot \vec{n} = 0$$

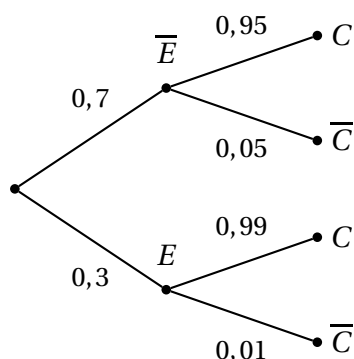
Ce qui signifie que le vecteur  $\vec{n}(3, -1, 2)$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}'$ .

## EXERCICE 2

(5 points)

## Partie A

1.



2. On cherche  $P(C \cap \overline{E}) = P_{\overline{E}}(C) \times P(\overline{E}) = 0,95 \times 0,70 = 0,665$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(C \cap \overline{E}) + P(C \cap E) = 0,665 + 0,99 \times 0,30 = 0,962.$$

4.  $P_C(E) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} = \frac{0,99 \times 0,30}{0,962} \approx 0,309$  à  $10^{-3}$  près

## Partie B

1.  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0,17; 0,006^2)$ .

On cherche à calculer la probabilité  $P(0,16 \leq X \leq 0,18)$  qui est égale à 0,9044 d'après la table.

a. D'après le cours, comme  $Y$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(m_2; \sigma_2^2)$ , alors  $Z = \frac{Y - m_2}{\sigma_2}$  suit la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0,1)$ .

b.

$$0,16 \leq Y \leq 0,18 \iff \frac{0,16 - 0,17}{\sigma_2} \leq \frac{Y - 0,17}{\sigma_2} \leq \frac{0,18 - 0,17}{\sigma_2}$$

soit 
$$-\frac{0,01}{\sigma_2} \leq Z \leq \frac{0,01}{\sigma_2}$$

Donc lorsque  $Y$  appartient à l'intervalle  $[0,16; 0,18]$ , alors  $Z$  appartient à l'intervalle

$$\left[-\frac{0,01}{\sigma_2}; \frac{0,01}{\sigma_2}\right].$$

c. On sait que cette probabilité doit être égale à 0,990, le tableau donné permet d'obtenir

$$\beta = 2,5758$$

d'où 
$$\frac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758 \iff \sigma_2 = 0,00385$$

En conclusion, à  $10^{-3}$  près,  $\sigma \approx 0,004$ .

## EXERCICE 3

(6 points)

## Partie A

1. Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , il vient,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , il vient,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$

Graphiquement cela signifie que les droites d'équation  $y = 0$  et  $y = 1$  sont deux asymptotes horizontales à  $\mathcal{C}_1$  au voisinage respectivement de moins et plus l'infini.

$$2. f_1(x) = \frac{e^x \times 1}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$3. f_1' = -\frac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

Cette expression étant toujours strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , il en résulte que la fonction  $f_1$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

4.

$$I = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = [\ln(1 + e^x)]_0^1 = \ln(1 + e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right)$$

$I$  s'interprète graphiquement comme la mesure en unité d'aires du domaine limité par  $\mathcal{C}_1$ , l'axe des  $x$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ . C'est l'aire du rectangle de côté 1 et de longueur  $\ln\left(\frac{1 + e}{2}\right)$  qui vaut à peu près 0,62 unité d'aire (ce qui se vérifie visuellement sur l'annexe).

## Partie B

$P(x; f_1(x))$  et  $M(x; f_{-1}(x))$ .  $K$  est le milieu de  $[MP]$ .

$$1. f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1$$

$$2. y_K = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Le point  $K$  est donc un point de la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$ .

3. Il résulte de la question précédente que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$ .

4. Soit  $\mathcal{A}$  l'aire du domaine considéré. Par symétrie entre les deux courbes, on obtient

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^1 f_1(x) - \frac{1}{2} dx = 2 \int_0^1 f_1(x) dx - \int_0^1 dx = 2 \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right) - 1 \approx 0,24.$$

## Partie C

1. **Vrai** : Quel que soit  $k \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-kx} > 0 \Rightarrow 1 + e^{-kx} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1 + e^{-kx}} < 1$ .

2. **Faux** : On a vu que la fonction  $f_{-1}$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

3. **Vrai** : Car si  $k \geq 10$  alors  $-\frac{1}{2}k \leq -5$  puis  $e^{-\frac{1}{2}k} \leq e^{-5}$  par croissance de la fonction exponentielle et enfin  $1 + e^{-\frac{1}{2}k} \leq 1 + e^{-5}$ .

Finalement :

$$0,99 < 0,9933 \leq \frac{1}{1 + e^{-5}} \leq \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{2}k}} = f_k\left(\frac{1}{2}\right)$$

**EXERCICE 4 : Enseignement obligatoire uniquement****(5 points)****Partie A**

1. L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de  $v_0$  à  $v_n$  mais n'affiche que le dernier  $v_n$ .  
L'algorithme n° 2 calcule  $n$  fois de suite  $v_1$  à partir de  $v_0$  : il ne calcule pas les termes de 0 à  $v_n$ .  
L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de 0 à  $v_n$  et les affiche tous.
2. D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à  $n = 9$ ), il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3.
3. a. Montrons par récurrence la propriété  $P_n : 0 < v_n < 3$  pour tout entier naturel  $n$ .  
*Initialisation* :  $n = 0$ , on a bien  $0 < v_0 < 3$  vraie, puisque  $v_0 = 1$  ; ainsi  $P_0$  est vraie.  
*Hérédité* : Supposons  $P_n$  vraie, montrons alors que  $P_{n+1}$  est vraie.  
On suppose donc que  $0 < v_n < 3$ .  
Donc  $6 = 6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3 = 3$ , puis  
 $\frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3}$ , car la fonction inverse est décroissante sur  $]0 ; +\infty[$ .  
 $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3$ .  
Ainsi  $1 < \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3$ . L'hérédité est établie puisque  $P_{n+1}$  est vraie.  
Conclusion  
Par le principe de récurrence,  $P_n : 0 < v_n < 3$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .
- b.  $v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n}$ .  
Or, d'après la question précédente,  $0 < v_n < 3$  pour tout  $n$  entier naturel, ainsi  $6 - v_n$  est positif, donc  $v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n} > 0$ , ainsi la suite  $(v_n)$  est croissante.
- c. Comme la suite est majorée par 3 et croissante, alors elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

**Partie B**

1.  $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{6 - v_n}{3v_n - 9} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{6 - v_n - 3}{3v_n - 9} = \frac{-v_n + 3}{3v_n - 9} = -\frac{v_n - 3}{3(v_n - 3)} = -\frac{1}{3}$ .  
Ainsi la suite  $(w_n)$  est arithmétique de raison  $r = -\frac{1}{3}$ .
2.  $w_n = w_0 + nr = \frac{1}{1 - 3} - \frac{1}{3}n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n$ .  
Comme  $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$ , on a  $v_n = \frac{1}{w_n} + 3 = \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n} + 3 = \frac{6}{-3 - 2n} + 3$ .  
Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{-3 - 2n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$ .

**EXERCICE 4 : Enseignement de spécialité uniquement****(5 points)**

1.  $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 40 - 18 = 22$   
 $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 110 - 48 = 62$

2. a. «  $b$  prend la valeur  $5a - 6c$  »  
 b. La suite semble être croissante.

3.  $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Prouvons par récurrence que  $C_n = A^n C_0$ .

C'est vrai pour  $n = 0$ , car  $A^0$  est la matrice identité.

Supposons que  $C_n = A^n C_0$ , alors

$$C_{n+1} = AC_n = A(A^n C_0) = A \times A^n C_0 = A^{n+1} C_0$$

En conclusion, pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$C_n = A^n C_0$$

4.  $QP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -3+3 \\ 2-2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. C'est trivialement vrai pour  $n = 1$ .  
 Supposons que  $A^n = PD^nQ$ , alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nQ(PDQ) = PD^n(QP)DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q$$

En conclusion, pour tout entier naturel  $n$ , non nul on a

$$A^n = PD^nQ.$$

6. Puisque  $C_n = A^n C_0$ , on obtiendra  $u_n$  comme la somme :

$$u_n = 8(-2^n + 3^n) + 3(3 \times 2^n - 2 \times 3^n) = -8 \times 2^n + 8 \times 3^n + 9 \times 2^n - 6 \times 3^n = 2^n + 2 \times 3^n.$$

Les deux suites de terme général  $2^n$  et  $3^n$  ayant pour limite  $+\infty$ , il en résulte que la suite  $(u_n)$  n'a pas de limite finie, mais a une limite infinie (on dit qu'elle diverge vers  $+\infty$ ).

## ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie

Représentations graphiques  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_{-1}$  des fonctions  $f_1$  et  $f_{-1}$ 