D'après le deuxième tableau, il n'existe pas 3 entiers naturels $x$, $y$, et $z$ tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 7 \pmod 8$)

Partie B

- Cas où les 3 entiers naturels $x$, $y$ et $z$ sont tous impairs

Si $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n-1 \pmod{2^n}$ alors $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n \times k + 2^n - 1$

$\iff x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n(k+1)-1$

Donc la somme $x^2+y^2+z^2$ est impair.

- Cas où 2 d'entre eux sont pairs

Les 3 termes de cette somme ne peuvent pas être tous pairs et on ne peut pas avoir non plus, 2 entiers naturels impairs et un autre pair. Donc soit ils sont tous impairs, soit deux sont pairs et l'autre est impair.

Avec un tableau des restes de la congruence modulo 2,

| | | |
|---|---|---|
| $x \equiv$ | 0 | 1 |
| $x^2 \equiv$ | 0 | 1 |

on constate qu'un nombre et son carré ont la m̂ parité.

on en déduis que les termes de la somme $x^2+y^2+z^2$ sont donc tous impairs ou deux d'entre eux sont pairs.