Hérédité

On pose $P(n) = e^{n+1} > 2n+1$. On suppose que $P(n)$ est vrai pour un certain $n \geq 1$. On démontre alors $P(n+1) = e^{n+2} > 2(n+1)+1$

On a : $e^{n+1} > 2n+1$, donc $e^{n+2} = e \times e^{n+1} > (2n+1) \times e$ car $e > 0$.

Comme $e > 2$ et $2n+1 > 0$, on en déduis $e^{n+2} > (2n+1) \times 2$.

Ainsi $e^{n+2} > 4n+2 = 2n+2n+2$.

Or, comme $n \geq 1$, on a $2n \geq 2$ donc $2n+2 \geq 4$.

Donc, $e^{n+2} > 4n+2 > 2n+3 = 2(n+1)+1$

Par conséquent $P(n+1) = e^{n+2} > 2(n+1)+1$.

L'hérédité de l'hypothèse est donc vraie.

Conclusion

$P(1)$ est vraie et pour tout $n \geq 1$, $P(n)$ implique $P(n+1)$.

Comme $P(0)$ est vraie, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ e^{n+1} > 2n+1}$

c. On a $f_n(n) = -e^{-n} < 0$ et $f_n(n+1) = \frac{n+1-n}{n+1+n} - e^{-(n+1)} = \frac{1}{2n+1} - e^{-(n+1)}$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{(n+1)}}$$

D'après la question précédente, on sait que $e^{n+1} > 2n+1$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

donc ces deux nombres sont rangés dans l'ordre contraire

$\frac{1}{e^{n+1}} < \frac{1}{2n+1}$ donc $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}} > 0$.

Par conséquent $f_n(n+1) > 0$.