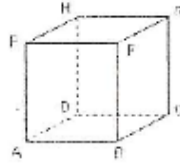


Exercice 1. On considère le cubé $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. On note a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) la longueur de ses arêtes.



1. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points M de l'espace tels que:

$$GM^2 + BM^2 + DM^2 = 3a^2.$$

2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AG}$. Déterminer l'ensemble \mathcal{F} des points M de l'espace qui vérifient:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AG} = 2a^2.$$

3. On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$, $\vec{j} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|}$ et $\vec{k} = \frac{\overrightarrow{AE}}{\|\overrightarrow{AE}\|}$.

Après avoir donné les coordonnées de chacun des points A, B, C, D, E, F, G et H , déterminer les équations cartésiennes des plans (P_1) passant par les points A, B, G ; (P_2) passant par les points E, F, C et (P_3) passant par les points D, F, B .

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection O des plans $(P_1), (P_2)$ et (P_3) . En déduire $\|\overrightarrow{AO}\|$.