

**Corrigé**

**Exercice 1**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{1-x}$ .

1.  $e^{1-x} = e \times e^{-x} = \frac{e}{e^x}$  donc  $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$  (par composition).  
 $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1-x} = -\infty$  (par produit);  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
3. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e \frac{x}{e^x} = 0$ .

On a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ce qui veut dire que la courbe représentant la fonction  $f$  admet la droite d'équation  $y = 0$  comme asymptote horizontale en  $+\infty$ .

4. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x(-1)e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$
5. Pour tout réel  $x$ ,  $e^{1-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $1-x$ .  
 $f(1) = 1e^0 = 1$ , d'où le tableau de variation de la fonction  $f$  :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$1-x$	$+$	$0$	$-$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$0$

**Partie B**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère les fonctions  $g_n$  et  $h_n$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}.$$

1.  $(1-x)g_n(x) = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)$   
 $= 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$   
 $-x-x^2-x^3-\dots-x^n-x^{n+1} = 1-x^{n+1}$

On obtient alors, pour tout réel  $x \neq 1$  :  $g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ .

2. Pour tout  $x$ ,  $g_n(x) = 1+x+x^2+\dots+x^n$  donc  $g'_n(x) = 0+1+2x+\dots+nx^{n-1} = h_n(x)$ .

Or, pour tout réel  $x \neq 1$ ,  $g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  ;

$g_n$  est une fonction rationnelle de type  $\frac{u}{v}$  dont la dérivée est  $\frac{u'v - uv'}{v^2}$  :

$$h_n(x) = g'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

3. Soit  $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ , où  $f(x) = xe^{1-x}$ .

$$S_n = 1 + 2e^{-1} + \dots + ne^{1-n} = 1 + 2e^{-1} + \dots + n(e^{-1})^{n-1} = h_n(e^{-1}).$$

$$\text{Or } h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \text{ donc } h_n(e^{-1}) = \frac{n(e^{-1})^{n+1} - (n+1)(e^{-1})^n + 1}{(1-(e^{-1}))^2};$$

$$S_n = \frac{\frac{n}{e^{n+1}} - \frac{n+1}{e^n} + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2}$$

On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{e^{n+1}} = 0$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$  comme limites en  $+\infty$  de fonctions rationnelles,

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ .

$$\frac{n}{e^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{e^{n+1}}; \text{ donc par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{e^{n+1}} = 1 \times 0 = 0.$$

$$\frac{n+1}{e^n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{e^n}; \text{ donc par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{e^n} = 1 \times 0 = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \frac{e^2}{(e-1)^2}.$$

### Exercice 2

4 points

#### Commun à tous les candidats

1. Dans le repère donné, A a pour coordonnées  $(0, 0, 0)$ , B  $(1, 0, 0)$ , D  $(0, 1, 0)$  et E  $(0, 0, 1)$ .

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \text{ donc le point F a pour coordonnées } (1, 0, 1).$$

La droite (FD) a pour vecteur directeur  $\overrightarrow{DF}$  de coordonnées  $(1, -1, 1)$ ; de plus elle passe par le point D  $(0, 1, 0)$ .

$$\text{La droite (FD) a pour représentation paramétrique : } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

2. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(1, -1, 1)$ . Ce vecteur est un vecteur normal au plan (BGE) s'il est orthogonal aux deux vecteurs  $\overrightarrow{EB}$  et  $\overrightarrow{EG}$  directeurs du plan (BGE).

$$\overrightarrow{EB} \text{ a pour coordonnées } (1, 0, -1); \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 1 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times (-1) = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{EB}.$$

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ a pour coordonnées } (1, 1, 0); \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{EG}.$$

Donc le vecteur  $\vec{n} (1, -1, 1)$  est normal au plan (BGE).

Le plan (BGE) a pour vecteur normal  $\vec{n}$  et passe par le point B; c'est l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que  $\vec{n} \perp \overrightarrow{BM}$ .

$$\overrightarrow{BM} \text{ a pour coordonnées } (x-1, y, z);$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{BM} \iff 1 \times (x-1) + (-1) \times y + 1 \times z = 0 \iff x - y + z - 1 = 0.$$

L'équation cartésienne du plan (BGE) est  $x - y + z - 1 = 0$ .

3. Le vecteur  $\overrightarrow{DF}$  est égal au vecteur  $\vec{n}$  qui est normal au plan (BGE) donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).

Les coordonnées  $(x, y, z)$  du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (BGE) sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ x - y + z - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ t - (1 - t) + t - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ 3t = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) au point K de coordonnées  $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

4. Les segments [BE], [EG] et [BG] sont tous les trois des diagonales de carrés de côtés 1 ; donc  $BE = EG = BG = \sqrt{2}$ . Le triangle BEG est équilatéral de côté  $\sqrt{2}$ .

Soit H le milieu de [EG] ; ce point est aussi le pied de la hauteur issue de B dans le triangle équilatéral BGE de côté  $a = \sqrt{2}$ .

Dans un triangle équilatéral de côté  $a$ , la hauteur est égale à  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  (relations dans un triangle rectangle) ; donc dans le triangle équilatéral BEG, la hauteur  $BH = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

L'aire du triangle BEG vaut  $\frac{EG \times BH}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

5. Le volume d'un tétraèdre est  $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$ .

D'après les questions précédentes, le volume du tétraèdre BEGD est  $\frac{\text{aire}(\text{BEG}) \times KD}{3}$ .

Dans le repère orthonormé  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  :

$$KD^2 = (x_D - x_K)^2 + (y_D - y_K)^2 + (z_D - z_K)^2 = \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9}$$

$$\text{donc } KD = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Le volume du tétraèdre est donc :  $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{3}$ .

### Exercice 3

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation (E) :  $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$ .

1. On résout l'équation (E) :  $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$  ;  $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4$ .

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z' = \frac{-(-2\sqrt{3}) + i\sqrt{4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i \text{ et } z'' = \sqrt{3} - i.$$

2. On considère la suite  $(M_n)$  des points d'affixes  $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$ , définie pour  $n \geq 1$ .

a.  $z_1 = 2^1 e^{i(-1)^1 \frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{-\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3} - i = z''$

Donc  $z_1$  est solution de l'équation (E).

b.  $z_2 = 2^2 e^{i(-1)^2 \frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$

$z_3 = 2^3 e^{i(-1)^3 \frac{\pi}{6}} = 8e^{i\frac{-\pi}{6}} = 8\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 4\sqrt{3} - 4i$

- c.  $|z_1| = 2$  donc le point  $M_1$  d'affixe  $z_1$  est situé sur le cercle de centre O et de rayon 2 ; de plus, la partie imaginaire de  $z_1$  est  $-1$  donc le point  $M_1$  est situé sur la droite d'équation  $y = -1$ .

Pour placer le point  $M_2$ , on utilise le fait que  $|z_2| = 4$  et que  $\text{Im}(z_2) = 2$ .

Pour placer le point  $M_3$ , on utilise le fait que  $|z_3| = 8$  et que  $\text{Im}(z_3) = -4$ .

$z_4 = 2^4 e^{i(-1)^4 \frac{\pi}{6}} = 16 e^{i \frac{\pi}{6}}$ ; pour placer le point  $M_4$ , on utilise le fait que  $|z_4| = 16$ ; de plus  $\arg(z_4) = \frac{\pi}{6} = \arg(z_2)$  donc les points  $O, M_2$  et  $M_4$  sont alignés donc  $M_4 \in (OM_2)$ .

Voir la figure en annexe.

$$3. \text{ Si } n \geq 1 \text{ et } n \text{ pair, } (-1)^n = +1, \text{ donc } e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = e^{i \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}.$$

$$\text{Donc si } n \geq 1 \text{ pair, } z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = 2^n \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right).$$

$$\text{Si } n \text{ impair, } (-1)^n = -1, \text{ donc } e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = e^{i \frac{-\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}.$$

$$\text{Donc si } n \text{ impair, } z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = 2^n \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right).$$

$$\text{Donc pour tout entier } n \geq 1, z_n = 2^n \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$$

$$4. M_1 M_2 = |z_2 - z_1| = |2\sqrt{3} + 2i - (\sqrt{3} - i)| = |2\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} + i| = |\sqrt{3} + 3i|$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$M_2 M_3 = |z_3 - z_2| = |4\sqrt{3} - 4i - (2\sqrt{3} + 2i)| = |4\sqrt{3} - 4i - 2\sqrt{3} - 2i| = |2\sqrt{3} - 6i|$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2} = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 2^2 \sqrt{3}$$

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $M_n M_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$ .

5. On note  $\ell_n = M_1 M_2 + M_2 M_3 + \dots + M_n M_{n+1}$ .

$$a. \text{ D'après la question 4, } \ell_n = 2\sqrt{3} + 2^2 \sqrt{3} + \dots + 2^n \sqrt{3} = (2 + 2^2 + \dots + 2^n) \sqrt{3}$$

La suite  $(2^n)$  définie pour  $n \geq 1$  est géométrique de raison  $q = 2$  et de premier terme  $2^1 = 2$ ; la somme  $S$  de ses premiers termes consécutifs est donnée par la formule :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$\text{donc } 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$$

$$\ell_n = (2 + 2^2 + \dots + 2^n) \sqrt{3} = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$$

$$b. \ell_n \geq 1000 \iff 2\sqrt{3}(2^n - 1) \geq 1000 \iff 2^n - 1 \geq \frac{1000}{2\sqrt{3}} \iff 2^n \geq \frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1$$

La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , donc

$$\ell_n \geq 1000 \iff \ln(2^n) \geq \ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right) \iff n \ln 2 \geq \ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right)$$

Or  $\ln 2 > 0$  donc

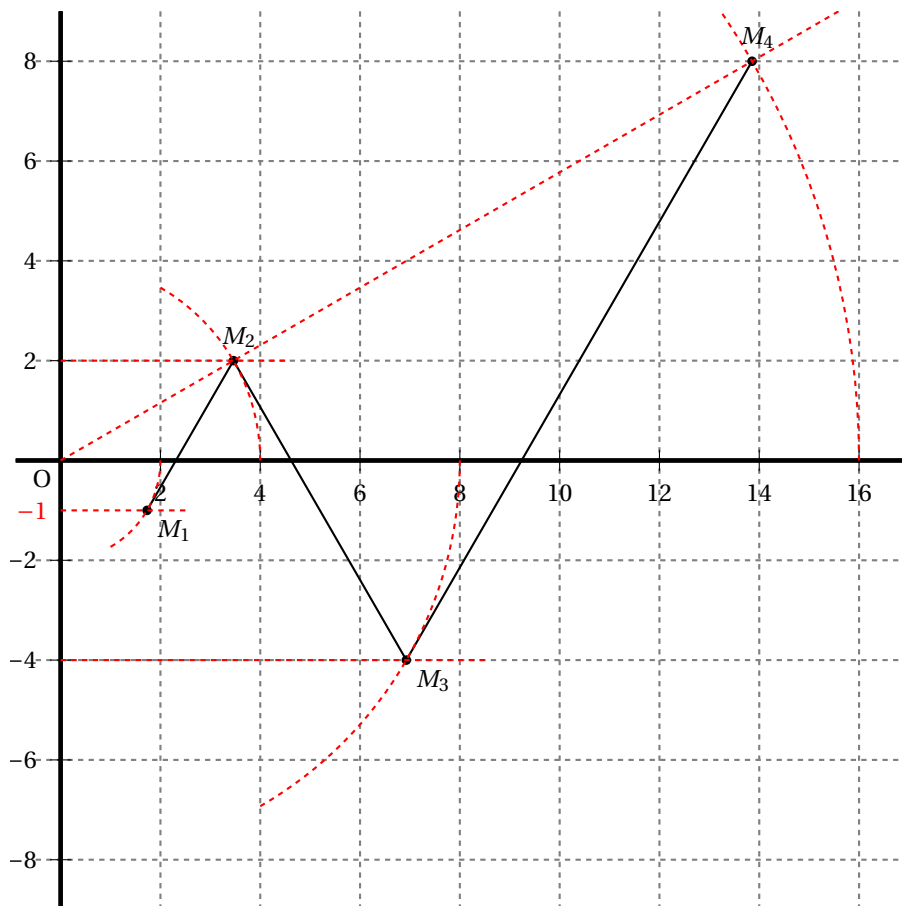
$$\ell_n \geq 1000 \iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right)}{\ln 2} \iff n \geq 8,18$$

Le plus petit entier  $n$  tel que  $\ell_n \geq 1000$  est 9.

On peut vérifier que  $\ell_8 = 510\sqrt{3} \approx 883 < 1000$  et  $\ell_9 = 1022\sqrt{3} \approx 1770 > 1000$ .

**ANNEXE**  
**À rendre avec la copie**

**Exercice 3 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**



**Exercice 3****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \end{aligned}$$

Si, après la  $n$ -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 (événement  $A_n$ ), il ne reste pas sur cette page donc  $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$ .

Si, après la  $n$ -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 (événement  $B_n$ ), il ira sur la page n° 1 avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$  donc  $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ .

Si, après la  $n$ -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 (événement  $C_n$ ), il ira sur la page n° 1 avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$  donc  $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ .

De plus  $P(A_n) = a_n$ ,  $P(B_n) = b_n$  et  $P(C_n) = c_n$ .

$$\text{Donc } a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n$$

On aurait pu aussi construire un arbre pondéré pour représenter la situation.

On admet que, de même,  $b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n$  et  $c_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n$ .

2. D'après la question précédente :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0 \times a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ c_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc en prenant } M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ on a } U_{n+1} = MU_n.$$

Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $U_n = M^n U_0$ .

- Pour  $n = 0$ ,  $M^0 U_0 = U_0$  car  $M^0$  est la matrice identité  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

- On suppose que la propriété est vraie au rang  $p$  avec  $p \geq 0$ , c'est-à-dire  $U_p = M^p U_0$ .

On sait que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = MU_n$  donc  $U_{p+1} = MU_p$ .

Or, d'après l'hypothèse de récurrence,  $U_p = M^p U_0$ , donc  $U_{p+1} = M \times M^p U_0 = M^{p+1} U_0$ .

Donc la propriété est vraie au rang  $p + 1$ .

- La propriété est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire, donc elle est pour tout  $n \geq 0$ .

Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = M^n U_0$ .

3. Soit la matrice colonne
- $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- telle que :
- $x + y + z = 1$
- et
- $MU = U$
- .

$$\begin{aligned}
 MU = U &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \end{cases} \\
 \text{On doit donc résoudre le système} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 2x & \text{(L1)} \\ x + y + z = 4y & \text{(L2)} \\ 3x + y + z = 4z & \text{(L3)} \\ x + y + z = 1 & \text{(L4)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

De (L2) et (L4) on déduit  $4y = 1$  d'où  $y = \frac{1}{4}$ .

(L1)  $\Leftrightarrow x + y + z = 3x$  ce qui donne en utilisant (L4) :  $1 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ .

(L4)  $\Leftrightarrow z = 1 - x - y \Rightarrow z = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ .

Comme on n'a pas procédé par équivalences, il faut vérifier que pour les trois valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$  trouvées, les quatre lignes du système sont vérifiées, ce qui se fait sans problème.

L'unique matrice colonne  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  telle que :  $x + y + z = 1$  et  $MU = U$ , est  $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix}$

$$\text{4. Pour } n \text{ entier non nul, on a : } M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 U_n = M^n U_0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \\ b_n = \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 \\ c_n = \left(\frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On constate que  $b_n = \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 = \frac{1}{4} (a_0 + b_0 + c_0)$ ; or  $a_0 + b_0 + c_0 = 1$  donc  $b_n = \frac{1}{4}$ .

On sait qu'une suite géométrique de raison  $q$  où  $-1 < q < 1$  est convergente vers 0 donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0; \text{ on en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n \times 2}{3} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{-3} = 0.$$

D'après les théorèmes sur les limites, on peut dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{5}{12}a_0 + \frac{5}{12}b_0 + \frac{5}{12}c_0 = \frac{5}{12}(a_0 + b_0 + c_0) = \frac{5}{12}.$$

5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}$  donc, à long terme, la page 1 du site sera consultée  $100 \times \frac{1}{3} \approx 33,33\%$  du temps de visite.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{4}$  donc, à long terme, la page 2 du site sera consultée  $100 \times \frac{1}{4} = 25\%$  du temps de visite.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{5}{12}$  donc à long terme, la page 3 du site sera consultée  $100 \times \frac{5}{12} \approx 41,67\%$  du temps de visite.

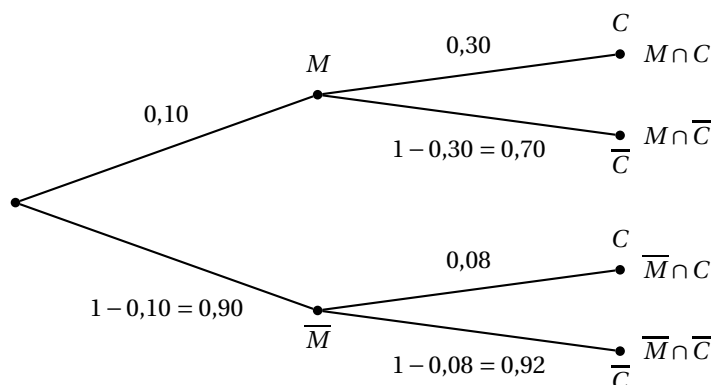
#### Exercice 4

5 points

Commun à tous les candidats

#### Partie A

En utilisant les données du texte, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



1. a.  $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

b. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P(\overline{M} \cap C) \\ &= P(M) \times P_M(C) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(C) = 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102 \end{aligned}$$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.

La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est  $P_C(M)$  :

$$P_C(M) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$$

#### Partie B

1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de 400 personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.

Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est  $P(M) = 0,1$  d'après le texte.

Donc on peut dire que la variable aléatoire  $X$  qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres  $n = 400$  et  $p = 0,1$ .

2. Comme  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(400; 0,1)$ ,  $P(X = 35) = \binom{400}{35} 0,1^{35} (1 - 0,1)^{400-35}$ ;

le résultat donné par la calculatrice est approximativement 0,0491.

3. La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est  $P(X \geq 30)$  qui est égale à  $1 - P(X < 30) = 1 - P(X \leq 29)$ .

D'après la calculatrice,  $P(X \leq 29) \approx 0,0357$ , donc  $P(X \geq 30) \approx 0,9643$ .

### Partie C

1. On sait que si  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ , alors l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire  $F = \frac{X}{400}$  au seuil de 95 % est donné par :

$$I = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= \left[ 0,1 - 1,96 \frac{\sqrt{0,1(1-0,1)}}{\sqrt{400}} ; 0,1 + 1,96 \frac{\sqrt{0,1(1-0,1)}}{\sqrt{400}} \right] = [0,0706 ; 0,1294]$$

2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme ;  $\frac{60}{400} = 0,15 \notin I$ .

Le taux de malades dans cet échantillon est anormalement élevé.