Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, si\ x \neq 0 \\ \lambda, \quad si\ x = 0 \end{cases}$ $où\ \lambda \in [-1; 1]$

Cet exercice a pour but de montrer que la fonction f n'est pas continue en 0 quelque soit λ. Pour cela on utilisera un raisonnement par l'absurde ainsi que le théorème suivant :

Théorème 1 : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est continue en x_0, un élément de I, si pour toute suite (u_n) d'éléments de I convergeant vers x_0 on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ et $v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$.

1. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes ?
2. Expliciter le terme général de la suite $(f(u_n))$ et celui de $(f(v_n))$. Ces deux suites sont-elles convergentes
3. A quelle contradiction aboutit-on si on suppose f continue en 0 ?
4. Conclure