Baccalauréat S La Réunion juillet 2000

Exercice 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité : 2 cm). On dit qu'un triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. On pose $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. **a.** Vérifier que 1 , j et j^2 sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.

   b. Calculer $(1-\mathrm{j})(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2)$; en déduire que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.

   c. Vérifier que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{j}^2 = 0$.

2. Dans le plan complexe, on considère trois points A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c.

   a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

   b. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$.

3. À tout nombre complexe $z \neq 1$, on associe les points R, M et M' d'affixes respectives 1, z et $\overline{z}$.

   a. Pour quelles valeurs de z les points M et M' sont-ils distincts ?

   b. En supposant que la condition précédente est réalisée, montrer que l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que le triangle RMM' soit équilatéral direct est une droite privée d'un point.

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On désigne par Γ la courbe paramétrée, ensemble des points $M(\theta)$ dont les coordonnées $(x(\theta),\ y(\theta)$ sont définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(\theta) & = & 20\mathrm{e}^{-\theta}\cos\theta \\ y(\theta) & = & 20\mathrm{e}^{-\theta}\sin\theta \end{array}\right. \quad \text{où} \quad \theta \in [0~;~+\infty[$$

1. Soient M et M_1, les points de Γ correspondant respectivement aux paramètres θ et $\theta + \pi$.

   a. Démontrer qu'il existe un réel k, indépendant de θ, que l'on déterminera, tel que

   $$\overrightarrow{\mathrm{O}M_1} = k\overrightarrow{\mathrm{O}M}.$$

   b. En déduire une transformation géométrique par laquelle, pour tout réel θ positif, M_1 est l'image de M.

2. On appelle Γ_1 la partie de Γ correspondant à θ élément de l'intervalle $[0~;~\pi]$.

   a. Montrer que :

   $$x'(\theta) = -20\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\theta}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad y'(\theta) = -20\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\theta}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

   b. Étudier le sens de variations des fonctions x et y sur $[0~;~\pi]$; rassembler les résultats dans un tableau unique et indiquer les points de Γ, en lesquels la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

3. Tracer Γ_1, ainsi que ses tangentes aux points $\mathrm{M}(0)$, $\mathrm{M}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{M}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\mathrm{M}(\pi)$.

   (unité graphique : 1 cm ; on prendra la feuille de papier millimétré dans le sens de la longueur avec l'axe des ordonnées à 4 cm du bord gauche).

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.
2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.
   a. Établir une relation entre α et β indépendante de n.
   b. Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
4. a. Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.
   b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Problème **10 points**

Le but du problème est l'étude simultanée de deux fonctions f et g (**partie A**), utilisées ensuite pour déterminer une valeur approchée d'un certain nombre réel noté C.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

Partie A :

Soient les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x - \text{e}^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = (1 - x)\text{e}^x.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ leurs courbes représentatives respectives

1. a. Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   c. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g, sur l'ensemble des nombres réels.
2. Pour tout réel x, on pose $h(x) = f(x) - g(x)$.
   a. Montrer que, pour tout réel x, $h'(x) = 1 - g(x)$.
   b. En déduire le sens de variations de la fonction h sur l'ensemble des nombres réels.
   c. Démontrer que les courbe $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse notée α, appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   d. Étudier, suivant les valeurs de x, la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
3. Tracer la droite (Δ) et les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
4. Pour tout réel x, on pose $\theta(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,\text{d}t$.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\theta(x)$.
   b. En déduire, sous la forme d'une expression rationnelle en α, l'aire en cm^2 du domaine limité sur le graphique par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. À l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de S_{20} d'amplitude 10^{-3}.

2. **a.** En utilisant le tableau de variations de la fonction g définie dans la **partie A**, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$,

$$\mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

b. En déduire que, pour tout nombre entier $k \geqslant 2$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \leqslant \dfrac{k}{k-1}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln\left(\dfrac{k}{k-1}\right)$.

c. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer $S_n - S_{n-1}$. En déduire que la suite (S_n) est décroissante.

3. Pour tout entier $n > 20$, on pose $u_n = S_{20} - S_n$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 20$, $u_n \geqslant 0$.

b. En utilisant le tableau de variations de la fonction f définie dans la **partie A**, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1]$, $1+x \leqslant \mathrm{e}^x$.

c. En déduire que pour tout nombre entier $k \geqslant 1$, $\dfrac{k+1}{k} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geqslant 1$, $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$. -

d. Vérifier que, pour tout entier naturel $n > 20$,

$$u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

En raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n > 20$,

$$\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leqslant \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

e. En déduire que, pour tout entier naturel $n > 20$,

$$u_n = \ln\left(\frac{21}{20}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

puis que, pour tout entier naturel $n > 20$, $u_n \leqslant 0,049$.

4. On admet que la suite (S_n) est convergente de limite notée C.

a. Justifier l'encadrement $S_{20} - 0,049 \leqslant \mathrm{C} \leqslant S_{20}$.

b. Déterminer un encadrement de C d'amplitude 0,05.