DM de Mathématiques

Exercice 1

1. On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0;\pi]$ par :
$$g(x) = x\cos x - \sin x$$
Etudier g et dresser son tableau de variation
En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;\pi]$

La fonction g est dérivable sur son ensemble de définition
On note :
$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$
$v(x) = \cos x \qquad v'(x) = -\sin x$
On a alors :
$g'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) - \sin' x$
$g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x$
$g'(x) = -x\sin x$
Pour étudier le signe de $g'(x)$, on note :
$0 \leq \sin x \leq 1$
$0 \geq -x\sin x \geq -x$

On a alors :

x	0		π
$g'(x)$		$-$	
g	0	$\searrow$	$-\pi$

$\forall x \in [0;\pi], g(x) \leq 0$

2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0;\pi]$ par :
$$\begin{cases} x = 0, & f(0) = 1 \\ x \in]0;\pi], & f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$$
On rappelle que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
Etudier les variations de f sur $]0;\pi]$

La fonction f est dérivable sur $]0;\pi]$
On note :
$u(x) = \sin x \qquad u'(x) = \cos x$
$v(x) = x \qquad v'(x) = 1$
On a alors :
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
Or $\forall x \in [0;\pi], g(x) \leq 0$ et $x^2 \geq 0$
Donc $f'(x) \leq 0$
On a donc f décroissante sur $]0;\pi]$, $f(0) = 1$ et $f(\pi) = 0$

3. Etude de f en 0
   (a) Prouver que, pour tout nombre réel $x \geq 0$: $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$
   (Pour cela on introduira la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par :
   $\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$; on calculera les dérivées $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ et on déduira le signe de φ.)

On calcule :
$\varphi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$
Puis $\varphi''(x) = -\sin x + x$
Et enfin $\varphi'''(x) = -\cos x + 1$
Or $-\cos x \geq -1$
Donc $-\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \varphi'''(x) \geq 0$
$\varphi'''(x)$ est positive donc φ'' est croissante et $\forall x \geq 0, \varphi''(x) \geq \varphi''(0) = 0$
On a donc $\varphi''(x)$ est positive et on a : $-\sin x + x \geq 0$
donc φ' est croissante et $\forall x \geq 0, \varphi'(x) \geq \varphi'(0) = 0$
Donc $\varphi'(x)$ est positive et φ est croissante et $\forall x \geq 0, \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$
Donc $\varphi(x)$ est positive et : $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$
On a alors :
$-\sin x + x \geq 0$
Et $\sin x - x - \frac{x^3}{6} \geq 0$
$\sin x + x \leq \frac{x^3}{6}$
Donc $0 \leq \sin x - x \leq \frac{x^3}{6}$

   (b) Prouver que f est dérivable au point 0 et calculer $f'(0)$

f est définie sur $[0;\pi]$ et $0 \in [0;\pi]$

Soit $h \neq 0$, $r_a(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{\sin h}{h}-1}{h}$

Or $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ donc $r_a(h) = 0$ quand h tend vers 0

f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$