Terminale S

Devoir en temps libre N°3

Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=(1-x)\sqrt{x^2-x^4}$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $[-1;1]$.
2. Montrer que f est continue sur $[-1;1]$.
3. Etude de la dérivabilité en -1.
   (a) Montrer que pour tout x de $[-1;1]$, $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{(1-x)\sqrt{x^2-x^3}}{\sqrt{1+x}}$.
   (b) Calculer la limite du taux d'accroissement de la fonction f en -1, que peut-on conclure sur la dérivabilité à droite de f en -1.
4. Etude de la dérivabilité en 1.
   (a) En calculant le taux d'accroissement de f en 1, montrer que f est dérivable à gauche en 1.
   (b) Donner une équation de la tangente à C_f en 1.
5. Etude de la dérivabilité en 0.
   (a) Montrer que le taux d'accroissement de f en 0 est égal à :
   $(1-x)\sqrt{1-x^2}$ si $x\geq 0$ et $-(1-x)\sqrt{1-x^2}$ si $x\leq 0$.
   (b) En déduire que f est dérivable à droite en à gauche en 0.
   (c) Donner une équation de la demi-tangente à droite à C_f en 0 et une équation de la demi-tangente à gauche à C_f en 0.
6. Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $]-1;0[$ ou $]0;1[$.
7. Etudier le signe de $f'(x)$, construire le tableau de variation complet de la fonction f.

P.S. :
a) Pour taux d'accroissement, on dit aussi taux de variation ; cette dernière expression est souvent employée.
En effet, en parlant rapidement, le nombre dérivé est la limite du taux de variation, le signe de la dérivée donne le sens de variation et on consigne tous ces résultats dans un tableau de variation. Enfin l'expression taux d'accroissement laisse croire à une augmentation puisque dans la vie courante on parle de taux d'accroissement et taux de diminution.
b) L'étude du signe de $f'(x)$ est assez technique.