Limite d'une fonction rationnelle en une valeur qui annule le dénominateur

Propriété :

Si f a pour limite	L >0 ou $+\infty$	L >0 ou $+\infty$	L <0 ou $-\infty$	L < 0 ou $-\infty$
Et si g a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Méthode :

Soit f une fonction rationnelle telle que $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$

soit α une racine de D(x) telle que $N(\alpha) \neq 0$ et telle que α soit une borne du domaine de définition de f . Pour trouver la limite de f en α :

1) On cherche $\lim\limits_{x \to \alpha} N(x)$:

2) On étudie le signe de D(x) au voisinage de α

3) On cherche $\lim\limits_{x \to \alpha\ (x<\alpha)} D(x)$ et on en déduit $\lim\limits_{x \to \alpha\ (x<\alpha)} f(x)$

4) On cherche $\lim\limits_{x \to \alpha\ (x>\alpha)} D(x)$ et on en déduit $\lim\limits_{x \to \alpha\ (x>\alpha)} f(x)$

Exemple :

Prenons comme exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $f(x) = \frac{-2x+1}{3x-6}$ alors $\alpha = 2$

1) $\lim\limits_{x \to 2} (-2x+1) = -3$

2) Signe de 3x-6

x	$-\infty$		**2**		$+\infty$
Signe de 3x-6		**-**	**0**	**+**	

3) quand x tend vers 2 par valeurs inférieures, 3x- 6 tend vers 0 en restant négatif

$\lim\limits_{x \to 2} (-2x+1) = -3$ et $\lim\limits_{x \to 2\ (x<2)} (3x-6) = 0$ avec $3x-6<0$ donc $\lim\limits_{x \to 2\ (x<2)} f(x) = +\infty$

4) quand x tend vers 2 par valeurs supérieures, x-2 tend vers 0 en restant positif

$\lim\limits_{x \to 2\ (x>2)} (x-2) = 0$ avec $3x-6 <0$ et $\lim\limits_{x \to 2} (-2x+1) = -3$ donc $\lim\limits_{x \to 2\ (x>2)} f(x) = -\infty$

Exercices :

Etudiez les limites des fonctions rationnelles f suivantes au point α indiqué

a) $f(x) = \frac{3x+1}{2x+3}$; $\alpha = -\frac{3}{2}$ b) $f(x) = \frac{x^2+2}{4-x}$; $\alpha = 4$ c) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$; $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$

Réponses :

a) $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}\ (x > -\frac{3}{2})} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}\ (x > -\frac{3}{2})} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 4\ (x < 4)} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 4\ (x > 4)} f(x) = -\infty$

c) tableau de signes de x^2-1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de x^2-1		+	0	-	0	+	

$\lim\limits_{x \to -1\ x < -1} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -1\ x > -1} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1\ x < 1} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1\ x > 1} f(x) = +\infty$