Utiliser une forme conjuguée pour déterminer une limite

Rappels

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$a - b$ et $a + b$ sont des expressions conjuguées

Exemple n°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{4+x^2}$

En $-\infty$, nous avons une forme indéterminée car $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{4+x^2} = +\infty$

Pour tout réel x, $(x + \sqrt{4+x^2})(x - \sqrt{4+x^2}) = x^2 - (4 + x^2) = -4$

Donc pour tout réel x, $x - \sqrt{4+x^2} \neq 0$ et

$$f(x) = \frac{(x + \sqrt{4+x^2})(x - \sqrt{4+x^2})}{x - \sqrt{4+x^2}} = \frac{-4}{x - \sqrt{4+x^2}}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x - \sqrt{4+x^2}) = -\infty$ donc $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

Exemple n°2

Soit g la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x+3} - 2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$, nous avons une forme indéterminée en 1

Pour tout réel $x > 1$, $\sqrt{x+3} + 2 > 2$

Donc pour tout réel $x \neq 1$, $\sqrt{x+3} - 2 \neq 0$ et

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{x + 3 - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2}$$

$\lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x+3} + 2) = 4$ donc $\mathbf{\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \frac{1}{4}}$

Exercice :

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = 0$ et que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4} - 2} = 4$