

D'après la question 2)

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)}_{(1)} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt}_{(2)} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}_{(3)}$$

①  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$  avec  $i = k+1$   
 $= \mu_n$  d'après c 1).

②  $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt.$

③  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$   
 $= \mu_n + \frac{4e-9}{n} e.$   
 d'après c 1)