DEVOIR 3

Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :
connectez-vous à votre site de formation www.cned.fr > espace inscrit
et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

IMPORTANT Veuillez réaliser ce devoir après avoir étudié **la séquence 5**.

« La réalisation de vos devoirs est un travail personnel permettant d'évaluer vos acquisitions et de construire votre projet d'orientation. Sauf consignes contraires, il est obligatoire de les réaliser dans les conditions de l'examen, c'est-à-dire en temps limité, sans recopier des contenus issus de supports extérieurs au sujet (internet, cours du CNED, manuels scolaires...). Le cas échéant, si vous avez besoin de vous référer à un passage issu d'un support extérieur, mettez-le entre guillemets et citez votre source. Tout travail non personnel sera sanctionné.»

Temps de réalisation du devoir : 2h00

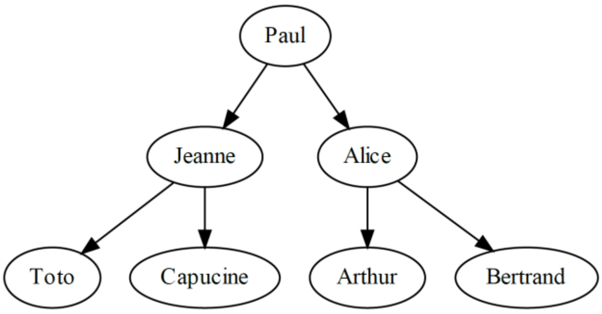
1 - Exercice 1 (15 points)

Dans cet exercice, on s'intéresse à un arbre généalogique particulier, c'est-à-dire un arbre dans lequel chaque personne peut avoir 0, 1 ou 2 enfants. On appelle ceci un arbre binaire. Un arbre est composé de nœuds et d'arêtes, une arête relie 2 nœuds entre eux.

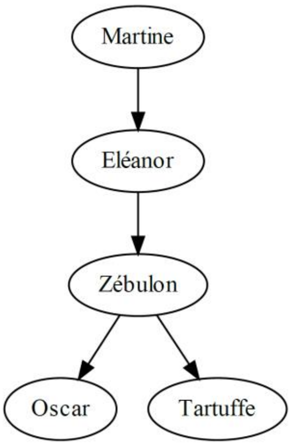
- La racine est un nœud sans père, et une feuille est un nœud sans enfant ;
- La hauteur d'un arbre est le nombre d'arêtes sur la branche la plus longue ;
- La taille d'un arbre est le nombre de nœuds de cet arbre.

Par exemple, l'arbre ci-dessous peut être interprété ainsi. Paul a eu deux enfants : Jeanne et Alice. À son tour, Jeanne a eu 2 enfants Toto et Capucine, et Alice a eu 2 enfants Arthur et Bertrand.

- On dit que cet arbre est de hauteur H=2, car à partir de la racine Paul, on a 2 générations ;
- On dit que le nombre de feuilles de cet arbre F=4, car il y a 4 sommets (Toto, Capucine, Arthur, Jeanne) qui n'ont aucun enfant ;
- La taille de cet arbre est T=7.



1) Dans l'arbre ci-dessous, donner taille T1, la hauteur H1 et le nombre de feuilles F1 :

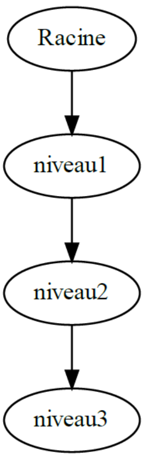


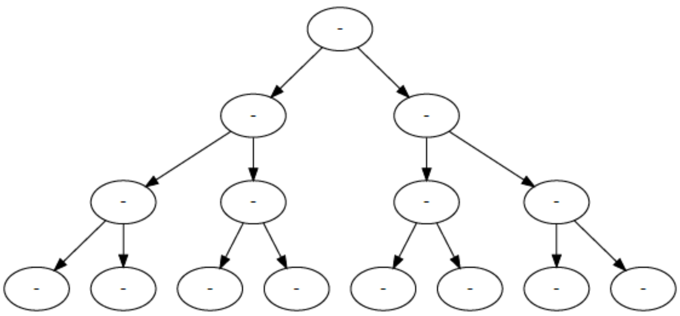
2) Soit un arbre binaire de hauteur 3 .

a) Encadrer son nombre de feuilles

b) Encadrer sa taille

(Vous pourrez vous aider des arbres donnés ci-dessous)





3) En utilisant une propriété du cours , calculer la somme :

$\sum_{i=0}^{8} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8$

4) On s'intéresse dans un premier temps à un arbre binaire filaire de hauteur h quelconque (h est un entier strictement positif) . C'est-à-dire un arbre dans lequel chaque nœud a un et un seul fils.

a) Combien de feuille(s) contient un tel arbre de hauteur h?

b) Quel est la taille d'un tel arbre de hauteur h ?

5) On s'intéresse maintant à un arbre complet de hauteur h quelconque (h est un entier strictement positif) , C'est-à-dire un arbre dans lequel chaque nœud a exactemùent 2 fils .

a) On appelle (u_n) la suite dans laquelle u_n contient le nombre de nœuds se trouvant à la hauteur n , donc $u_0 = 1$ par exemple . Déterminer la relation de récurrence liant deux termes successifs de cette suite

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n , et donner alors le nombre total de feuilles d'un arbre de taille h

c) En utilisant l'expression explicite de u_n , donner l'expression de S en fonction de h , S étant la taille d'un arbre complet de hauteur h ?

6) A l'aide des résultats précédents , donner un encadrement de F et de T , F et T étant le nombre de feuilles et la taille d'un arbre binaire de hauteur h

7) Quelle sera la hauteur minimale d'un arbre binaire de taille T=130 ?

Conseils / méthodologie

2) Pour cette question , vous allez considérer dans un premier temps un arbre où chaque nœud a exactement 1 enfant , cela vous permettra d'obtenir le nombre minimal de feuilles que l'on peut avoir dans un arbre de hauteur 3.

Dans un second temps , vous considèrerez un arbre où chaque nœud possède exactement 2 enfants , et cela vous permettra d'obtenir le nombre maximal de feuilles que l'on peut avoir.

7) Pour cette question , vous devrez utiliser l'encadrement trouvé dans la question précédente , et essayer les valeurs successives croissantes de h jusqu'à en trouver une qui répond au problème.

Vous devez reconnaître une suite géométrique, connaître la relation de récurrence qui la régit ainsi que son expression explicite.

2 - Exercice 2 (5 points)

Soit la suite (u_n) définiie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

1) Justifier que cette suite est définie pour tout entier naturel n.
2) Rappeler ce qu'est le sens de variations d'une suite.
3) Quelles sont les deux méthodes que l'on peut utiliser ici pour déterminer le sens de variations de (u_n) ?
4) Déterminer ce sens de variations.

Conseils / méthodologie

1) Une fraction est définie si son dénominateur est non nul.

2) Attention à ne pas confondre signe et sens de variations.

Bien connaître son cours sur les suites.

Pour la question 4, les 2 méthodes permettent d'aboutir au résultat, mais une méthode est plus simple que l'autre , donc penser à optimiser vos calculs.