

Distribué le 4/02/2022

A rendre le 21/02/2022

NOM : Prénom : Note/20 :

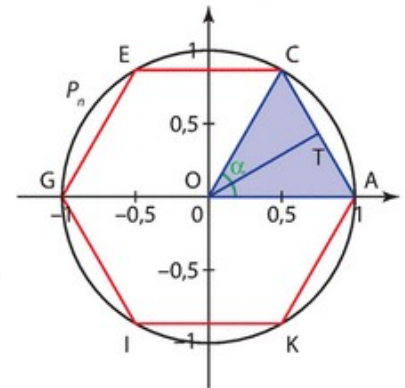
La méthode d'Archimède consiste à encadrer le cercle trigonométrique par deux polygones à $6 \times 2^{n-1}$ côtés (avec n entier naturel non nul) dont on détermine les périmètres.

Soit P_n le polygone à $6 \times 2^{n-1}$ côtés (de côté a_n) inscrit à l'intérieur du cercle trigonométrique et Q_n le polygone à $6 \times 2^{n-1}$ côtés (de côté b_n) exinscrit au cercle trigonométrique.

A ► Étude du polygone inscrit P_1

On considère le triangle OAC isocèle en O. Soit T le milieu de [AC].

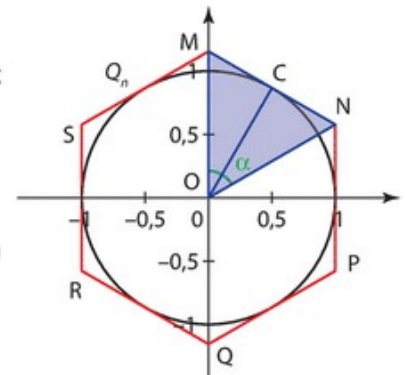
1. Donner la valeur de OA.
2. Montrer que $AT = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
3. En déduire l'expression de la longueur AC en fonction de α , puis l'expression du périmètre du polygone P_1 en fonction de α .
4. Conjecturer, en fonction de α , l'expression du périmètre de P_2 , puis de P_n .



B ► Étude du polygone exinscrit Q_1

On considère le triangle OMN isocèle en O. Soit C le milieu de [MN]. On admet que la droite (MN) est perpendiculaire à (OC).

1. Donner la valeur de OC.
2. Montrer que $CN = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
3. En déduire l'expression de la longueur MN en fonction de α , puis l'expression du périmètre du polygone Q_1 en fonction et de α .
4. Conjecturer en fonction de α , l'expression du périmètre de Q_1 , puis de Q_n .



Problème :

C ► À l'aide du tableur



1. Recopier et compléter le tableau ci-contre dans un tableur.

2. Quelles formules faut-il entrer en D3, E3, F3, G3, H3 et I3 pour, en les recopiant vers le bas, compléter le tableau ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	Nombre de côtés de P_n	Angle principal de chaque triangle isocèle (en degrés)	Côté du polygone inscrit	Périmètre inscrit	Approximation inférieure de π	Côté du polygone exinscrit	Périmètre exinscrit	Approximation supérieure de π
2	1	6	60,00	1,00000	6,00000	3,00000	1,15470	6,92820	3,46410
3	2	12	30,00	0,51764	6,21166	3,10583	0,53590	6,43078	3,21539
4	3	24	15,00						
5	4	48	7,50						

3. En considérant un polygone à 1 536 côtés, quel encadrement du nombre π (à 5 décimales) peut-on faire à l'aide de ce tableur ?

D ► À l'aide d'un algorithme

Algo & Prog



On considère l'algorithme ci-contre écrit en langage PYTHON.

1. Que permet de calculer cet algorithme ?
2. Modifier cet algorithme afin qu'il calcule le nombre minimal de côtés de P_n et de Q_n afin d'obtenir une valeur approchée de π à 10^{-6} près.

```
import math

n=2
N=3
a=120
I=0
S=1
while n>0:
    a=a/2
    N=2*N
    I=N*2*math.sin(math.radians(a)/2)/2
    S=N*2*math.tan(math.radians(a)/2)/2
    n=n-1
print("I=",I,"S=",S)
```