

## Devoir maison de Mathématiques n°2

( A rendre le mercredi 10 Novembre 2021 )

Dans ce devoir, il sera nécessaire d'utiliser la propriété suivante ( que l'on reverra plus tard en cours )

:

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$

la fonction  $f: x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$

et pour tout  $x \in I, f(x) = u'(x)e^{u(x)}$

$$e^{2x+3} \rightarrow 2e^{2x+3}$$

**Partie A :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{-x^2}$

1. Démontrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $-x^2 \leq -2x + 1$  puis que  $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$
2. a) Démontrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $xe^{-2x+1} = -0,5e \times (-2xe^{-2x})$   
b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$
3. Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  de  $[0 ; +\infty[$
4. Etudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$

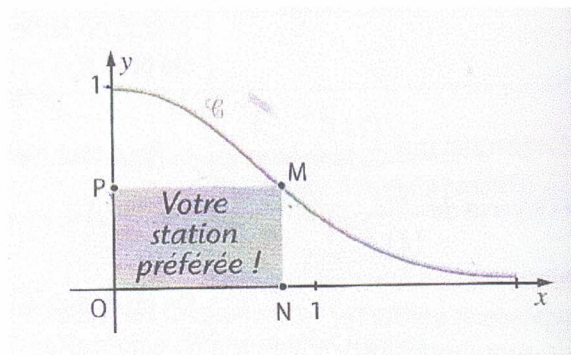
### Partie B :

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.

Le panneau est découpé dans une plaque rectangulaire de 12 mètres sur 1 mètre.

La courbe  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative de la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; 2]$  par  $g(x) = e^{-x^2}$

Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-contre



L'unité choisie est le mètre. Pour  $x$  nombre réel appartenant à  $[0 ; 2]$ , on note :

- M le point de la courbe  $\mathcal{C}$  de coordonnées  $(x; e^{-x^2})$
- N le point de coordonnées  $(x; 0)$
- P le point de coordonnées  $(0; e^{-x^2})$
- $A(x)$  l'aire du rectangle ONMP

1. Justifier que pour tout  $x$  de  $[0 ; 2]$ , on a :  $A(x) = xe^{-x^2}$
2. Déterminer la position du point M sur la courbe  $\mathcal{C}$  pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale.
3. Le rectangle ONMP d'aire maximale obtenu à la question 2. doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer, en  $m^2$  et à  $10^{-2}$  près, la mesure de la surface à peindre en bleu.