

A rendre le vendredi 27 novembre 2020

Attention date pouvant être modifiée en fonction des dates des conseils de classe

EXERCICE 1 On considère la fonction f qui à tout complexe z , associe son image $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par f .
2. Si on pose $z = x + iy$, donner l'écriture sous forme algébrique de $f(z)$.
3. Quels sont les nombres complexes qui possèdent une image réelle par f ?

• ○ • ○ •

EXERCICE 2 On considère la polynôme P à coefficients complexes défini sur \mathbb{C} par

$$P(z) = z^3 - 2(\sqrt{2} - i)z^2 + (3 - 4i\sqrt{2})z + 6i$$

1. Montrer que $-2i$ est une racine du polynôme P .
2. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout nombre complexe z , $P(z) = (z + 2i)(az^2 + bz + c)$.
3. Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

• ○ • ○ •

EXERCICE 3 Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier les réponses par une preuve lorsque c'est vrai et par un contre exemple lorsque c'est faux.

1. **Proposition** : Le produit d'un entier impair par un entier pair est un entier pair.
2. **Proposition** : Soient a , b et c trois entiers relatifs. Si a divise $b + c$ alors a divise b ou a divise c .
3. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :

$$a = 2n^2 + 7n + 21 \text{ et } b = 2n + 2.$$

Proposition : Pour tout entier naturel n , le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et $n + 17$.

4. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $aba7$.

Proposition : « Si N est divisible par 7 alors $a + b$ est divisible par 7. »

• ○ • ○ •

EXERCICE 4 Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que la fraction $\frac{11n - 6}{3n + 1}$ peut se simplifier sous la forme d'un entier relatif.

• ○ • ○ •

EXERCICE 5 1. Justifier que tout entier s'écrit sous la forme $3k$ ou $3k + 1$ ou $3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(5n^2 - 2)$ est divisible par 3. On pourra raisonner par disjonction des cas.

• ○ • ○ •