

Toutes les réponses devront être justifiées. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Les questions sont indépendantes

1. En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (ou *binary digit* ou chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (c'est-à-dire un octet), combien de caractères différents peut-on coder ?
2. Un clavier de 12 touches (9 chiffres et 3 lettres A, B et C) permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non. Une personne compose un code au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle compose le bon code ?
3. Dans la classe vous êtes 39 élèves. Quel est le nombre de choix possibles pour élire les deux délégués titulaires ?

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 2n^2 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$.

Exercice 3 :

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $v_0 = \frac{1}{4}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2v_n}{(n+3)v_n + 1}.$$

1. Démontrer, par récurrence sur n , que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$.
2. Écrire un programme, en langage Scilab, qui calcule et affiche la valeur de v_n où n est un entier entrée par l'utilisateur au clavier.
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{v_n}$

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

b) Déterminer les réels a et b tels que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + an + b$ soit géométrique.

c) Exprimer w_n en fonction de n

d) En déduire v_n en fonction de n .

e) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

f) Modifier le programme obtenu à la question 2, pour calculer et afficher la plus petite valeur de n telle que $0 < v_n < 10^{-2}$.

4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad S(n) = \sum_{k=0}^n u_k$. Exprimer $S(n)$ en fonction de n .