Mathématiques Financières

1 Intérêts, valeur acquise, valeur actuelle

■ Exercice 1

On place un capital $C_0 = 2\ 000$ € en « obligations » à 3,41 % par an, avec intérêt simple, pendant 10 ans.
Calculer le capital disponible au bout de 10 ans.

■ Exercice 2

Calculer la valeur acquise par un capital C de 2 650 € placé à intérêts composés pendant 4 ans au taux semestriel de 1,50%.
En déduire le montant des intérêts acquis. *Arrondir au centime d'euros.*

■ Exercice 3

Déterminer à quel taux annuel il faut placer, à intérêts composés, une somme de 10 000 € pour que sa valeur acquise au bout de deux ans de placement soit de 10 816 €.

■ Exercice 4

1. Déterminer la valeur actuelle C_0 du capital C_7 qui, placé aujourd'hui, à intérêts composés au taux annuel de 3,25%, vaudra 6 000 € dans 7 ans ?
2. Quel capital faut-il placer aujourd'hui à 1,5% par an, avec intérêts composés, pour que la valeur acquise dans 10 ans soit 20 000 € ?

■ Exercice 5

On a placé 1 500 € sur un compte épargne il y a 4 ans, jour pour jour, à intérêts composés, au taux annuel de 3,25%. On souhaite disposer de 2 400 € dans 3 ans.

1. (a) Déterminer la somme S_1 dont on dispose aujourd'hui sur le compte épargne, intérêts compris.
   (b) Déterminer le montant des intérêts perçus au bout de 4 ans.
2. Déterminer la somme S_2 qu'il faut déposer aujourd'hui sur le compte épargne pour disposer, sur ce même compte 2 400 € dans 3 ans.

■ Exercice 6

Monsieur Alibert a emprunté, à intérêts composés, 25 000 € pour une durée de 3 ans. À l'échéance, il devra rembourser 29 775,40 €.
Déterminer le taux de l'emprunt.

■ Exercice 7

Un investissement de 50 000 € est envisagé. Cette dépense apportera une recette de 25 000 € dans 3 ans et de 35 000 € dans 4 ans.

1. Sachant que l'alternative est le placement à intérêts composés au taux annuel de 4%, l'investissement sera-t-il réalisé ?
2. Même question si le taux annuel est de 6%.

■ Exercice 8

On remplace 4 règlements : 1 000 € dans un an, 3 000 € dans 3 ans, 3 510 € dans 5 ans, 2 000 € dans 6 ans, par deux règlements égaux, l'un dans un an, l'autre dans deux ans.
Le taux étant de 6%, quel est le montant de ces deux règlements ?

■ Exercice 9

Un règlement de 50 000 € prévu le 15/06/16 est remplacé par 3 règlements de même valeur qui interviendront le 15/06/17, le 15/12/17 et le 15/03/18.
Déterminer le montant de chacun de ces règlements, le taux étant de 6%.

■ Exercice 10

20 000 € son placés à intérêts composés, pendant un an. On retire alors 15 000€.
Un an après ce retrait on dispose de 7 128 €.
Déterminer le taux de capitalisation.

2 Valeur acquise d'une suite d'annuités constantes

Lorsqu'on constitue un capital en plaçant pendant n années, à la fin de chaque année, la même somme, d'un montant de a euros, sur un compte épargne rémunéré au taux annuel de t %, avec intérêts composés, le capital constitué le jour du versement de la dernière annuité est la valeur acquise de la suite d'annuités constantes.

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{avec } i = \frac{t}{100}$$

■ Exercice 11

Un suite de 10 annuités constantes a une valeur acquise de 73 124,38 € .

Le taux de capitalisation étant de 8,2%, déterminer le montant de l'annuité.

■ Exercice 12

Déterminer la valeur acquise par une suite de 15 annuités constantes égales à 4 200 euros dans le cas d'un placement à intérêts composés, avec un intérêt annuel de 3,5%.

■ Exercice 13

Un capital de 30 000 € a été constitué par le versement de 12 annuités constantes capitalisées au taux de 4%.

Déterminer le montant de l'annuité constante.

■ Exercice 14

Des annuités constantes de 5 000 € chacune ont une valeur acquise de 37 380,15€ , la première a été versée le 01/10/13. Le taux de capitalisation est de 8,75%.

Déterminer la date de la dernière annuité.

3 Emprunts à annuités constantes

Le montant en euros, a, de chacune des n annuités dans le cas d'un emprunt à annuités constantes de E euros, avec un taux d'intérêts annuel de t% est :

$$a = E \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \quad \text{avec } i = \frac{t}{100}$$

■ Exercice 15

On emprunte 100 000 €, pour acheter un logement, au taux d'intérêt annuel de 1,25% sur 25 ans. Cet emprunt est à annuités constantes.

1. Calculer le montant des annuités. *Arrondir au centime d'euro.*
2. Calculer le montant total des intérêts versés à l'organisme de crédit au bout de 25 ans, c'est-à-dire le coût du crédit.

■ Exercice 16

On rembourse une dette au moyen d'annuités constantes.

1. Déterminer le montant de l'annuité pour un capital de 350 000 €, sur 15 ans avec un taux de 4%.
2. S'il s'agit de remboursements d'un prêt souscrit pour l'achat d'un immeuble, quel est le prix total payé au bout de 15 ans ?

■ Exercice 17

On se propose d'emprunter 100 000 € le 2 janvier pour acheter un logement. Le taux d'intérêt annuel varie suivant la durée du prêt. Le remboursement se fait par annuités constantes divisées chacune en 12 mensualités égales. Pour chacune des durées possibles, calculer le montant de la mensualité et le montant total des intérêts versés à l'organisme de crédit à l'échéance, c'est-à-dire le coût du crédit.

Durée	Taux	Montant de la mensualité	Coût du crédit
10 ans	2,10%		
15 ans	2,40%		
20 ans	2,70%		

■ Exercice 18

Un banquier propose des prêts sur 10 ans au taux annuel de 3,93%, tous frais inclus. Le remboursement se fait par annuités constantes, divisées chacune en 12 mensualités égales.

Combien peut-on emprunter si on veut que chaque mensualité soit égal à 500 € ?

■ Exercice 19

Un emprunt de 200 000 € est remboursable en une seule fois à la fin de la cinquième année au taux annuel de 13%. L'emprunteur effectue en même temps et à partir de la fin de la première année, le placement de cinq annuités constantes pour préparer le remboursement de l'emprunt. Le taux annuel de placement est de 7%. Quel doit être le montant minimum de l'annuité pour pouvoir rembourser l'emprunt ?

■ Exercice 20

Combien faut-il payer par mois pour rembourser un emprunt de 400 000 € sur 15 ans au taux annuel de 5% ?

4 Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes

Lorsqu'un revenu est constitué d'un versement de a euros, à la fin de chaque année, pendant n années, au lieu de disposer de ce revenu dans les années à venir, on peut vouloir disposer immédiatement de la valeur actuelle de la suite de ces annuités constantes, au taux d'actualisation de t %.

$$V_A = a \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

■ Exercice 21

Déterminer la valeur actuelle au taux d'actualisation de 4% d'une suite d'annuités constantes de 1 500 € versées à la fin de chaque année pendant sept ans.

■ Exercice 22

Un organisme financier propose deux rentes versées en fin d'année, l'une de 2 000 € pendant cinq ans, l'autre de 1 200 € pendant 9 ans.
Comparer les valeurs actuelles de ces deux rentes au taux d'actualisation de 4,8%.

■ Exercice 23

Calculer la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes toutes égales à 1 200 € versées à la fin de chacune des 9 prochaines années, au taux d'intérêt annuel de 9%.

■ Exercice 24

Déterminer le nombre d'annuités toutes égales à 2 500 €, versées à la fin de chaque année, au taux d'intérêt annuel de 9,25% afin que la valeur actuelle de l'ensemble soit de 9 661,38€.

■ Exercice 25

Calculer le montant de chacune des six annuités constantes, versées à la fin de chacune des six prochaines années au taux d'intérêt annuel de 7% pour que la valeur actuelle soit égal à 5 719,85 €.

■ Exercice 26

Une personne âgé de 30 ans a placé un capital de 20 000 € à 7%.
À partir de 50 ans, elle retire 1 000 € à la fin de chaque année.
Que laissera cette personne à ses héritiers si elle meurt à 60 ans, après avoir effectué son retrait ?

■ Exercice 27

Quelle somme peut-on placer à la fin de chaque année durant 10 ans pour que l'on puisse par la suite recevoir 2 000 € au début de chaque année durant les cinq prochaines années au taux annuel de 6% ?

■ Exercice 28

Calculer la valeur actuelle d'une dette qui doit être payée d'abord en cinq versements annuels de 1 000 €, puis en cinq autres versements annuels de 2 000 €, si le taux d'intérêt annuel est de 12%.

■ Exercice 29

Une suite de 12 annuités est constituée de trois annuités de 1 000 € chacune, quatre annuités de 2 000 € chacune, et cinq annuités de 3 000 € chacune.
Calculer la valeur acquise et la valeur actuelle des 12 annuités au taux d'intérêt annuel de 12%.

■ Exercice 30

Une personne a versé dans une banque une somme de 6 000 € par an, le 1er janvier de chaque année pendant 10 ans, la première a été versée le 1er janvier 1997, la dernière le 1er janvier 2006. Puis, pendant dix ans, elle a retiré la même somme de 6 000 €, la première a été retirée le 1er janvier 2007, la dernière le 1er janvier 2016. Calculer l'avoir de cette personne dans la banque au 31 décembre 2016 en tenant compte des intérêts composés au taux annuel de 5%.

5 Emprunt et amortissement

■ Exercice 31

Le 1er janvier un emprunt de 50 000 € est contracté auprès de la banque.
Durée : 5 ans ; Taux : 10% ; Annuité constante (le plus utilisé).

Compléter le tableau suivant :

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette

■ Exercice 32

Le 1er janvier un emprunt de 200 000 € est contracté auprès de la banque.
Durée : 8 ans ; Taux : 12%.

Compléter le tableau suivant :

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette

■ Exercice 33

Le 1er janvier un emprunt de 100 000 € est contracté auprès de la banque.
Durée : 3 ans ; Taux : 9%.

Présenter les 3 premières lignes du tableau d'emprunt (mensualités constantes) :

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette

■ Exercice 34

Une société a le choix pour financer une investissement entre deux prêts (remboursables par annuités constante) proposé par deux banques :

- Prêt 1 : BNP Paribas
  Montant : 150 000 € ; Taux : 6 % ; Durée : 6 ans.
- Prêt 2 : CIC Lyonnaise de banque
  Montant : 150 000 € ; Taux : 7 % ; Durée : 5 ans.

Quelle est la meilleure solution ?

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette

Correction

1 Intérêts, valeur acquise, valeur actuelle

■ Exercice 1

$C_{10} = 2\ 000 + 10 \times 2\ 000 \times 0{,}0341 = 2\ 682$

■ Exercice 2

$C_8 = 2\ 650 \times 1{,}015^8 \approx 2\ 985{,}21$
$I = 2\ 985{,}21 - 2\ 796{,}76 = 335{,}21$

■ Exercice 3

On résout l'équation : $10\ 816 = 10\ 000 \times (1+t)^2$
On trouve $t = 0{,}04 = 4\%$.

■ Exercice 4

1. On résout $6\ 000 = C_0 \times 1{,}0325^7$, on trouve $C_0 = 4\ 796{,}46$.
2. On résout $20\ 000 = C_0 \times 1{,}015^{10}$, on trouve $C_0 = 17\ 233{,}34$.

■ Exercice 5

1. (a) $S_1 = 1\ 500 \times 1{,}0325^4 = 1\ 704{,}71$
   (b) $I = 1\ 704{,}71 - 1\ 500 = 204{,}71$
2. $2\ 400 \times 1{,}0325^{-3} - 1\ 704{,}71 = 475{,}71$

■ Exercice 6

On résout l'équation $C_n = C_0(1+t)^n$ soit $29\ 775{,}40 = 25\ 000(1+t)^3$
On trouve $t \approx 6\%$

■ Exercice 7

On cherche les valeurs acquises :

1. $50\ 000 \times 1{,}04^4 = 58\ 492{,}93$
   $25\ 000 \times 1{,}04 + 35\ 000 = 61\ 000$ donc il faut investir.
2. $50\ 000 \times 1{,}06^4 = 63\ 123{,}85$
   $25\ 000 \times 1{,}06 + 35\ 000 = 61\ 500$ donc il ne faut pas investir.

■ Exercice 8

On cherche les valeurs acquises des annuités au bout des 6 ans :
$1\ 000 \times 1{,}06^5 + 3\ 000 \times 1{,}06^3 + 3\ 510 \times 1{,}06 + 2\ 000 = 10\ 631{,}87$.
On résout alors l'équation : $C \times 1{,}06^5 + C \times 1{,}06^4 = 10\ 631{,}87$ et on trouve $C = 4\ 088{,}08$.

■ Exercice 9

On cherche le taux trimestriel équivalent : $(1+t)^4 = 1{,}06$ d'où $t = 1{,}47\%$
On résout l'équation : $C(1+t)^{-4} + C(1+t)^{-6} + C(1+t)^{-7} = 50\ 000$ d'où $C = 18\ 100{,}48$.

■ Exercice 10

Il faut résoudre l'équation : $(20\ 000(1+t) - 15\ 000)\,(1+t) = 7\ 128$.
On arrive à $20\ 000t^2 + 25\ 000t - 2\ 128 = 0$ dont les solutions sont -133% et 8%.

2 Valeur acquise d'une suite d'annuités constantes

■ Exercice 11

$a = 73\ 124{,}38 \times \dfrac{0{,}082}{1{,}082^{10} - 1} \approx 5\ 000$

■ Exercice 12

$V_{15} = 4\ 200 \times \dfrac{1{,}035^{15} - 1}{0{,}035} = 81\ 041{,}86$

■ Exercice 13

On résout l'équation : $30\ 000 = a \times \dfrac{1{,}04^{12} - 1}{0{,}04}$, on trouve $a = 1\ 996{,}57$

■ Exercice 14

On résout l'équation : $37\ 380{,}15 = 5\ 000 \times \dfrac{1{,}0875^n - 1}{0{,}0875}$, on trouve $n = 6$.

3 Emprunts à annuités constantes

■ Exercice 15

1. $a = 100\ 000 \times \dfrac{0{,}0125}{1 - 1{,}0125^{-25}} = 4\ 682{,}25$
2. $I = 25 \times 4\ 682{,}25 - 100\ 000 = 17\ 056$

■ Exercice 16

1. $a = 350\ 000 \times \dfrac{0{,}04}{1 - 1{,}04^{-15}} = 31\ 479{,}39$
2. $15 \times 31\ 479{,}39 = 472\ 190{,}78$

■ Exercice 17

Durée	Taux	Montant de la mensualité	Coût du crédit
10 ans	2,10%	932,58	11 909,80
15 ans	2,40%	668,11	20 260,26
20 ans	2,70%	544,71	30 730,51

■ Exercice 18

L'annuité est de 6 000 euros. (500×12).

On résout l'équation $6\ 000 = E \times \dfrac{0{,}0393}{1 - 1{,}0393^{-10}}$

On trouve $E = 48\ 835{,}40$

■ Exercice 19

$200\ 000 \times 1{,}13^5 \approx 368\ 487{,}04$.

On résout ensuite : $368\ 487{,}04 = a \times \dfrac{1{,}07^5 - 1}{0{,}07}$ et on trouve $a = 64\ 076{,}47$.

■ Exercice 20

$a = 400\ 000 \times \dfrac{0{,}05}{1 - 1{,}05^{-15}} \approx 38\ 536{,}92$ et donc $m = \dfrac{a}{12} \approx 3\ 211{,}41$.

4 Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes

■ Exercice 21

$V_A = 1\ 500 \times \dfrac{1 - 1{,}04^{-7}}{0{,}04} = 9\ 003{,}08$

■ Exercice 22

$V_{A_1} = 2\ 000 \times \dfrac{1 - 1{,}048^{-5}}{0{,}048} = 8\ 707{,}04$

$V_{A_2} = 1\ 200 \times \dfrac{1 - 1{,}048^{-9}}{0{,}048} = 8\ 605{,}87$

■ Exercice 23

$V_A = 1\ 200 \times \dfrac{1 - 1{,}09^{-9}}{0{,}09} = 7\ 194{,}30$

■ Exercice 24

On résout l'équation : $9\ 661{,}38 = 2\ 500 \times \dfrac{1 - 1{,}0925^{-n}}{0{,}0925}$. On trouve $n = 5$.

■ Exercice 25

On résout l'équation : $5\ 719{,}85 = a \times \dfrac{1 - 1{,}07^{-6}}{0{,}07} = 1\ 086{,}71$

■ Exercice 26

Le capital (aux 50 ans) ans est $20\ 000 \times 1{,}07^{20} = 77\ 393{,}69$

La valeur actuelle (aux 50 ans) des retraits de 1 000 € est :

$1\ 000 \times \dfrac{1 - 1{,}07^{-10}}{0{,}07} = 7\ 023{,}58$

Le capital acquis (aux 60 ans) est : $(77\ 393{,}69 - 7\ 023{,}58) \times 1{,}07^{10} = 138\ 428{,}65$.

■ Exercice 27

On résout l'équation : $a \times \dfrac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} = 2\ 000 \times \dfrac{1 - 1{,}06^{-5}}{0{,}06}$.

On trouve $a \approx 639{,}17$.

■ Exercice 28

$V_1 = 1\ 000 \times \dfrac{1 - 1{,}12^{-5}}{0{,}12} \approx 3\ 604{,}78$

$V_2 = 2\ 000 \times \dfrac{1 - 1{,}12^{-5}}{0{,}12} \times 1{,}12^{-5} \approx 4\ 090{,}85$

$V_a = V_1 + V_2 \approx 7\ 695{,}67$.

■ Exercice 29

On calcule la valeur actuelle des 3 premières annuités :

$V_1 = 1\ 000 \times \dfrac{1 - 1{,}12^{-3}}{0{,}12} = 2\ 401{,}83$

On calcule la valeur actuelle des 4 annuités suivantes :

$V_2 = 2\ 000 \times \dfrac{1 - 1{,}12^{-4}}{0{,}12} \times 1{,}12^{-3} = 4\ 323{,}85$

On calcule la valeur actuelle des 5 annuités suivantes :

$V_3 = 3\ 000 \times \dfrac{1 - 1{,}12^{-5}}{0{,}12} \times 1{,}12^{-4} = 6\ 872{,}70$

La valeur actuelle est $V_1 + V_2 + V_3 = 13\ 598{,}38$

La valeur acquise est $13\ 598{,}38 \times 1{,}12^{12} \approx 52\ 978{,}96$.

■ Exercice 30

La valeur acquise au 1^er janvier 2006 des premiers versements est :

$V_a = 6\ 000 \times \dfrac{1 - 1{,}05^{-10}}{0{,}05} \approx 46\ 330{,}41$.

Le 31 décembre 2006, la valeur des versements est : $46\ 330{,}41 \times 1{,}05 \approx 48\ 646{,}93$.

La valeur actuelle au 31 décembre 2006 des retraits de 6 000 € est :

$6\ 000 \times \dfrac{1 - 1{,}05^{-10}}{0{,}05} \approx 46\ 330{,}41$.

La valeur acquise au 31 décembre 2016 est donc :

$(48\ 646{,}93 - 46\ 330{,}41) \times 1{,}05^{10} \approx 3\ 773{,}37$.

5 Emprunts et amortissement

■ Exercice 31

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette
1	50 000	5 000	8 189,87	13 189,87	41 810,13
2	41 810,13	4 181,01	9 008,86	13 189,87	32 801,26
3	32 801,26	3 280,13	9 909,75	13 189,87	22 891,52
4	22 891,52	2 289,15	10 900,72	13 189,87	11 990,79
5	11 990,79	1 199,08	11 990,79	13 189,87	0

■ Exercice 32

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette
1	200 000	24 000	16 260,57	40 260,57	183 739,43
2	183 739,43	22 408,73	18 211,84	40 260,57	165 527,60
...	...	...	...	...	...
8	35 946,94	4 313,63	35 946,94	40 260,57	0

■ Exercice 33

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette
1	100 000	9 000	30 505,48	39 505,48	69 494,52
2	69 494,52	6 254,51	33 250,97	39 505,48	36 243,56
3	336 243,56	3 261,92	36 243,56	39 505,48	0

■ Exercice 34

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette
1	150 000	9 000	21 504,39	30 504,39	128 495,61
2	128 495,61	7 709,74	22 794,66	30 504,39	105 700,95
...	...	...	...	...	...
6	28 777,73	1 726,66	28 777,73	30 504,39	0

Année	Emprunt restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité	Valeur nette
1	150 000	10 500	26 083,60	36 583,60	123 916,40
2	123 916,40	8 674,15	27 909,46	36 583,60	96 006,94
...	...	...	...	...	...
5	34 190,28	2 393,32	34 190,28	36 583,60	0

Le montant des intérêts avec la BNP est 32 918,02 € alors qu'à la CIC il est de 33 026,37 €.
Mieux vaut choisir la BNP dans ce cas.