Soit f définie sur ℝ par : ∀ x ⩽ 1, f(x) = 0 et ∀ x > 1, f(x) = $\frac{1}{a}x^{-\frac{a+1}{a}}$ avec a un réel strictement positif.

Soit n ∈ ℕ*, on considère $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi X, on pose T = Min($X_1, X_2, \dots, X_n$). Déterminer la fonction de répartition F_T de T. Etudier l'existence de l'espérance de T et donner alors sa valeur.

Correction :

$T(\Omega) = [1 ; +\infty[$

Pour tout x ⩾1,

$F_T(x) = P(T \leqslant x) = 1 - P(T > x)$ (*)

Si T > x alors pour tout i, on a $x_i > x$ car T = min X_i

Donc $(T > x) = (X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \dots \cap (X_n > x)$

Comme les X_i sont indépendants

$P(T > x) = P(X_1 > x)\ P(X_2 > x)\ P(X_n > x)$

Comme les X_i suivent la même loi

$P(T > x) = [P(X>x)]^n$

Or $F_X(x) = P(X \leqslant x) = 1 - P(X > x)$ alors $P(X > x) = 1 - F_X(x)$

Ainsi

$P(T > x) = [P(X>x)]^n = [1 - F_X(x)]^n$.

D'où

- Pour x ⩾ 1 : $P(T > x) = [1 - F_X(x)]^n = [\,1 - (-\,x^{-\frac{1}{a}} + 1)]^n = [-\,x^{-\frac{1}{a}}]^n$

  Dans (*), on obtient $F_T(x) = 1 - [-\,x^{-\frac{1}{a}}]^n$
- Pour x ⩽1 : $P(T > x) = [1 - F_X(x)]^n = (1-0)^n = 1$

  Dans (*), on obtient $F_T(x) = 1 - 1 = 0$

Par dérivation une densité g de T est

g(x) = 0 si x < 1 et $g(x) = \frac{n}{a}x^{-\left(\frac{n}{a}+1\right)}$ si x ⩾1

donc t g(t) = 0 si t < 1 et $tg(t) = \frac{n}{a}t^{-\left(\frac{n}{a}\right)}$ si t ⩾1

convergence de l'intégrale de rieman pour n/a >1 donc n >a >0 donc l'espérance existe.

$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{n}{a}t^{-\left(\frac{n}{a}\right)} dt = \frac{n}{a}\left[\frac{t^{-\frac{n}{a}+1}}{\frac{a-n}{a}}\right]_1^{+\infty} = \frac{n}{a-n}(-1)$ car

$$\lim_{n\to\infty} t^{-\frac{n}{a}+1} = 0$$

$E(T) = \frac{n}{n-a}$