DM 6 Pour lundi 16 mars 2019-2020

TS1

Exercice 1

Soit f la fonction $x \longmapsto a+\dfrac{b}{x-c}$ où a, b et c sont des réels et dont le tableau de variation est le suivant :

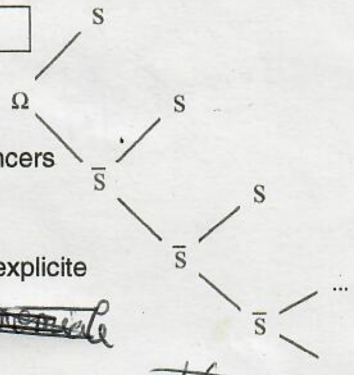
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	-1 ↘	-4 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	$-\infty$

En justifiant, déterminer a, b et c grâce au tableau.

Exercice 2

Au jeu des petits chevaux, pour pouvoir faire sortir son cheval du box, il faut réaliser un « 6 » avec un dé.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers du dé nécessaire à l'obtention d'un « 6 ».



1) Pour tout entier naturel $n>0$, on pose $u_n = p(X=n)$.
   En vous aidant de l'arbre suivant, donner une formule explicite de u_n en expliquant votre démarche.
2) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Justifier.
3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p(X \leqslant n) = 1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
   b) Déterminer la limite de $p(X \leqslant n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.
4) a) Exprimer en fonction de n la probabilité $p_{(X>n)}(X>2n)$ de ne pas avoir obtenu de « 6 » après $2n$ lancers sachant que le « 6 » n'est pas apparu lors des n premiers .
   b) Comparer ce résultat à $p(X>n)$. On dit que la variable aléatoire X suit une « loi sans mémoire ». Expliquer cette expression. indépendante
5) À l'aide d'un calcul numérique (calculatrice, tableur, ...), conjecturer la médiane de la variable X. 1
6) Soit $E[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times p(X=k)$ l'espérance de la variable aléatoire X.
   Pour la calculer, comme le nombre de termes de cette somme est infini, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times p(X=k)$ et ainsi $E[X] = \lim_{n \to +\infty} S_n$ si cette limite existe.
   a) Montrer que pour tout naturel non nul, $S_{n+1} = S_n + \dfrac{n+1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
   b) Montrer alors par récurrence que $S_n = 6-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\dfrac{5}{6}n+5\right)$.
   Indication : pensez à écrire $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \times \dfrac{6}{5}$.
   c) À l'aide d'un calcul numérique (calculatrice, tableur, ...), conjecturer $\lim_{n \to +\infty} S_n$, c'est à dire E[X]. Interpréter. 6