Classes : Terminale S — Le 14/02/2020

MATHÉMATIQUES
Baccalauréat Blanc
Obligatoire

Durée : 4 heures

Exercice 1: (3 *points*)

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.
On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.
On pourra construire un arbre pondéré.

1. On note :
   - D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;
   - R_1 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

   Calculer la probabilité de l'évènement R_1.
2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.
   On note :
   - D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel » ;
   - R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel » ;
   - R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

   Montrer que la probabilité de l'évènement R est 0,236.
3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (On donnera la réponse arrondie au millième.)

Exercice 2: (4 *points*)

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) z + 8\mathrm{i} = 0 \quad (E).$$

   (a) Montrer que le nombre $-2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

   (b) Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) z + 8\mathrm{i} = (z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right).$$

   (c) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Dans la suite, on se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé d'origine O.

2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

   (a) Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

   (b) Placer ces points sur une figure que l'on complètera par la suite.

   (c) On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_{L} du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

3. On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

   (a) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.
   Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

   (b) À l'aide de la question **3. a.**, démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

Exercice 3: (5 *points*)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et pour tout $n > 1$: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. À l'aide de la calculatrice, quelles conjectures peut-on faire concernant les variations de la suite (u_n) et sa limite ?
2. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n - 3}{u_n + 2}$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n - 1 > 0$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   (d) Que peut on en déduire ?
3. On définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ pour tout entier naturel n.

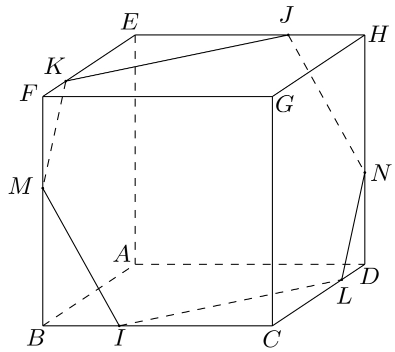
   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis que (u_n) converge vers une limite notée ℓ.
4. (a) Recopier et compléter l'algorithme à l'issue duquel n est le plus petit rang tel que $u_n - \ell < 10^{-3}$.

```
U ← 5
n ← 0
Tant Que ..............
   U ← ...........
   n ← ...........
Fin Tant Que
```

   (b) Quelle est la valeur de n à l'issue de l'algorithme précédent ?

Exercice 4: (3 *points*)



$ABCDEFGH$ est un cube. I est un point sur le $[BC]$, J sur $[EH]$ et K sur $[EF]$.
Le polygone $ILNJKM$ est la section de ce cube par le plan (IJK).

1. (a) Les droites (KJ) et (IL) sont-elles parallèles ?
   (b) Montrer que les droites (IJ) et (LK) sont sécantes.
2. Dans le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on donne $I\left(1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, $J\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$ et $K\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,1\right)$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

   On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (KL) est : $\begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (IJ) et (KL).
   (c) Déterminer les coordonnées du point L.

Exercice 5: (5 *points*)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x\mathrm{e}^{2x+1}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

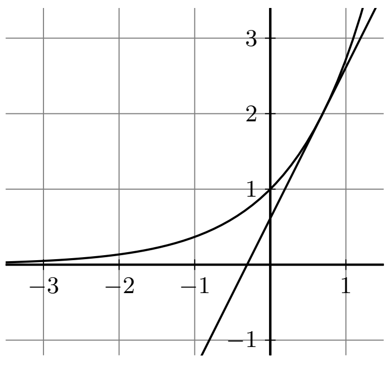
Partie A : Étude de la fonction f.

1. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Après avoir vérifié que pour tout réel x, $f(x) = -\frac{\mathrm{e}}{2} \times 2x\mathrm{e}^{2x}$, déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction f.

Partie B

Soit (Γ) la courbe représentant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x$.
m est un réel quelconque et on note M le point de la courbe (Γ) d'abscisse m.

1. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (Γ) au point M en fonction de m.
2. Montrer que la tangente T n'est jamais parallèle à l'axe des abscisses.
3. La tangente T coupe l'axe des abscisses en un point A et l'axe des ordonnées en un point B.
   Soit J le milieu de $[AB]$.
   (a) Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentant la fonction exponentielle ainsi qu'une de ses tangentes correspondant à une valeur particulière de m.



   Placer, dans cette situation, les points M, A, B et J.
   (b) Montrer que J a pour coordonnées $\left(\frac{m-1}{2}\,;\,\frac{-m+1}{2}\mathrm{e}^m\right)$.
4. Montrer que J appartient à la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.
5. Pour quelle valeur de m, l'ordonnée du point J est-elle maximale ? Préciser dans ce cas les coordonnées de J.
6. Montrer que pour tout réel $k < 0$, il existe un unique point M sur (Γ) pour lequel J a pour ordonnée k.