Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan d'unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x + x + 1$$

1. Étudier le sens de variation de g et déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
3. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

   En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$; en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de T.
4. Déterminer la limite de f en $-\infty$; interpréter géométriquement ce résultat.
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
6. Tracer $\mathscr{C}$ et T.

$g(x) = e^x + x + 1 = 0$

$g(\alpha) = e^\alpha + \alpha + 1 = 0$

donc $e^\alpha + 1 = -\alpha$

et $e^\alpha = -\alpha - 1$

Partie B

2) $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$

$f(\alpha) = \dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \dfrac{\alpha(-\alpha - 1)}{-\alpha} =$

$\dfrac{-\alpha^2 - \alpha}{-\alpha}$

$\dfrac{-\alpha^2}{-\alpha} \; \dfrac{\cancel{\alpha}}{-\alpha} = -\alpha + 1$

encadrement :

$-0,01 < 0 < +0,01$

3) a) La Tangente T a pour equat

$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$

Ici $a = 0$

$y = f'0 \times x + f(0)$

$= \dfrac{2}{4}$

$= \dfrac{1}{2} \times x + 0$

$= \dfrac{x}{2}$

b)