**TS1** **DM n°2** **pour lundi 23/09/2019**

**Exercice 1** Soit *f* la fonction de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x-3 + \dfrac{x^2-4x+3}{x^3}$.

On notera ( C ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal donnée ci-contre.

1° a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x on ait : $2x^4-x^2+8x-9=(x-1)(ax^3+bx^2+cx+d)$.

b) Montrer que l'on a $f'(x)=\dfrac{(x-1)g(x)}{x^4}$, f ' dérivée de f et $g(x) = 2x^3+2x^2+x+9$

c) Montrer que $g(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.

2° Dresser le tableau de variation de f.

**Exercice 2. Restitution de connaissances**

*Pré-requis : la fonction exponentielle, notée exp, a les quatre propriétés suivantes :*

- *exp est une fonction dérivable sur R.*
- *sa fonction dérivée, notée exp', est telle que, pour tout réel x, exp'(x) = exp(x).*
- *la fonction exponentielle ne s'annule pas sur R.*
- *exp(0) = 1.*

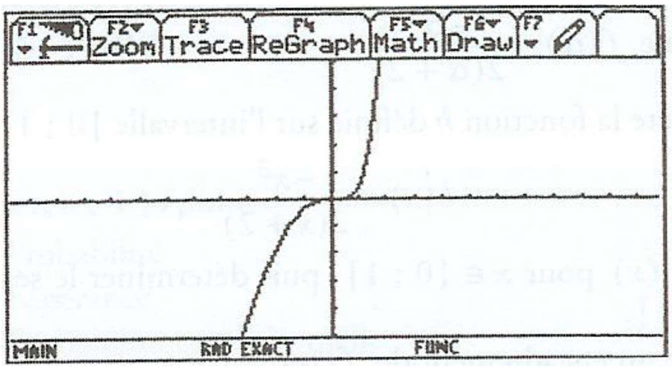
1° En n'utilisant que ces quatre propriétés de la fonction exp, démontrer que, pour tous réels a et b,
exp(a + b) = exp(a) × exp(b). (On pourra utiliser la fonction h définie sur R par
h(x) = f(a + b – x) × f(x) où f est la fonction exponentielle et en calculant h'(x) , h(0) et h(b) ).

2° En déduire que, pour tout réel a, $\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}$.

**EXERCICE 3.** On considère la fonction numérique *f* définie sur [-3 ; 2] par: $f(x)=x^2e^{x-1}-\dfrac{x^2}{2}$

Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormé

.




**Conjectures**

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant:

**a.** le sens de variation de *f* sur [- 3 ; 2] ?

**b.** la position de la courbe par rapport à l'axe *(x' x)* ?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

**Partie A : Contrôle de la première conjecture**

**1.** Calculer f ' (x) pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression g (x) où *g* est la fonction définie sur [-3 ; 2] par:
$g(x)=(x+2)e^{x-1}-1$

**2. Étude du signe de *g(x)* pour *x* réel**

**a)** Calculer *g'(x)* et étudier son signe suivant les valeurs de *x.*

**b)** En déduire le sens de variation de la fonction *g,* puis dresser son tableau de variation.

**c)** On admet que l'équation *g(x)* = 0 possède une unique solution dans R.

On note □ cette solution. Montrer que 0,20 < □ < 0,21 .

**e**. Déterminer le signe de *g(x)* suivant les valeurs de *x.*

**3. Sens de variation de la fonction *f* sur R.**

**a)** Étudier, suivant les valeurs de *x,* le signe de f '(x).

**b)** En déduire le sens de variation de la fonction f.

**c.** Que pensez-vous de votre première conjecture?

**Partie B : Contrôle de la deuxième conjecture**

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe *(x' x)* ,**1.** Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$ .

**2.** On considère la fonction *h* définie sur l'intervalle [0 ; 1] par: $h(x)=\dfrac{-x^3}{2(x+2)}$

**a)** Calculer h' (x) pour $x\in$ [0 ; 1] , puis déterminer le sens de variation de h sur [0; 1].

**b)** En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

**3. a)** On admet que l'équation $e^{x-1}=\dfrac{1}{2}$ admet une solution $\beta$ dont on donnera un encadrement à $10^{-2}$ près en utilisant la calculatrice.

**b)** Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe *(x'x).*

**c)** Préciser alors la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.

**d)** Que pensez-vous de votre deuxième conjecture?