

Stage olympique de Saint-Malo

Cours – Théorie des graphes

Samedi 2 août 2003

par

Pierre BORNSZTEIN

Table des matières

1	Premières notions	2
1.1	Graphes	2
1.2	Degré d'un sommet	4
1.3	Connexité	5
1.4	Graphe complet – Graphe multipartite	8
1.5	Exercices	9
2	Graphes planaires – formule d'Euler	10
2.1	Exercices	12
3	Coloriages	13
3.1	Nombre chromatique	13
3.2	L'algorithme glouton	14
3.3	Le polynôme chromatique d'un graphe	15
3.4	Coloriages d'arêtes	17
3.5	Introduction aux problèmes extrémaux	17
3.6	Exercices	18
4	Parcours sur un graphe	20
4.1	Chemins eulériens	20
4.2	Chemins hamiltoniens	22
4.3	Exercices	23
5	Solutions	24

Ce qui suit a pour objet de donner quelques définitions naïves de la théorie des graphes et de dégager quelques résultats fondamentaux. On ne se formalisera donc pas de la rigueur sans doute insuffisante de l'exposé.

Le lecteur désireux d'en savoir plus pourra utilement se reporter aux références données à la fin.

1 Premières notions

1.1 Graphes

Considérons les deux situations suivantes :

a) Dans une ville, se trouvent trois maisons A, B, C et trois usines, eau, gaz, électricité. Chaque maison doit être reliée à chaque usine par une conduite. On aimerait réaliser ces raccordements sans que deux conduites ne se croisent.

b) On fabrique 7 produits chimiques, dont certains, par paires, ne peuvent être transportés dans un même camion sans risque d'explosion. Connaissant ceux des produits qui ne peuvent cohabiter, l'objectif est de réaliser le transport sans risque et au moindre coût (c.à.d. en utilisant le moins de camions possible).

Il est assez naturel d'essayer de faire un dessin :

- Pour l'exemple a), on symbolise chaque maison par une croix et chaque usine par un rond. On veut donc relier chaque croix à chaque rond par des arcs de courbes qui ne se rencontrent pas (enfin, pas ailleurs qu'aux extrémités. Voir fig.1).

- Pour l'exemple b), on symbolise chaque produit par un point du plan, mais on a un choix à faire concernant la symbolisation des relations entre les produits : soit on relie deux points si et seulement s'ils peuvent être transportés ensemble (par exemple, fig.2). Soit on fait le contraire (fig.3). Nous verrons au chapitre 3 que ce deuxième choix est plus intéressant.

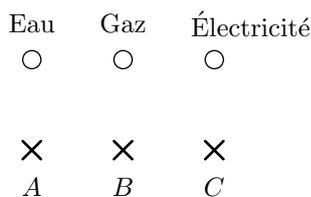


FIG. 1 – Les trois maisons et les trois usines

De façon générale :

Un *graphe* \mathcal{G} est formé d'une part d'un ensemble \mathcal{S} (fini ou non) d'objets appelés *sommets*, et d'autre part d'un ensemble \mathcal{A} d'*arêtes* dont chacune relie un couple de sommets.

Si A et B sont deux sommets, on notera (A, B) l'arête qui a pour origine A et pour extrémité B .

A priori, les arêtes (A, B) et (B, A) ne sont donc pas les mêmes. Dans ce cas, on dit que le graphe est *orienté*. Si, par contre, on ne différencie jamais ces deux arêtes (pour tous sommets A et B), on dit qu'il n'est pas orienté et A et B sont dits *adjacents*.

Dans les deux exemples ci-dessus, les graphes ne sont pas orientés.

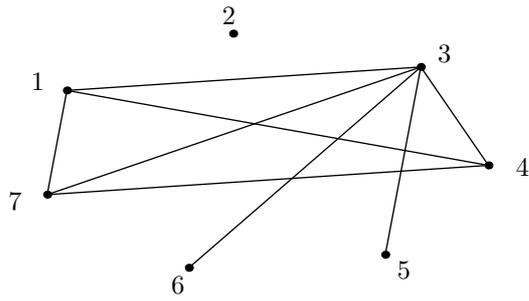


FIG. 2 – Produits chimiques que l'on peut mettre ensemble

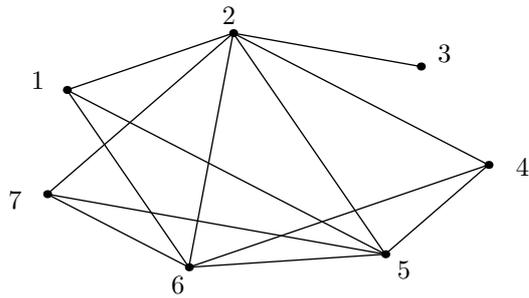


FIG. 3 – Attention! Produits chimiques à ne pas mélanger

L'organigramme d'une entreprise ou un arbre généalogique sont des exemples de graphes orientés.

Il arrive donc souvent que l'on représente les sommets par des points et les arêtes par des arcs de courbes, l'emplacement des points les uns par rapport aux autres et le fait que les courbes s'intersectent ou non étant *a priori* sans importance (voir tout de même plus loin la question de la planarité). En particulier, les points d'intersections des courbes ne sont pas des sommets supplémentaires.

Toutefois, il convient de remarquer qu'un même graphe peut être représenté de plusieurs façons différentes du point de vue géométrique (fig.4)

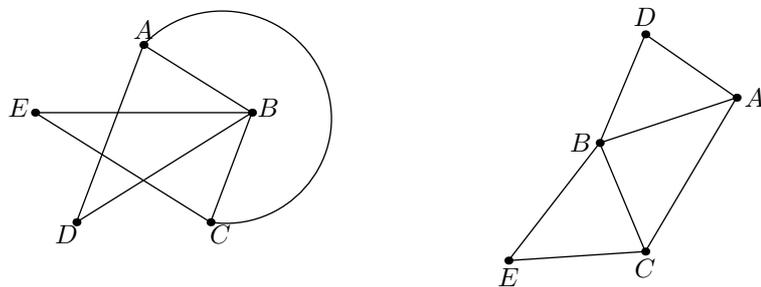


FIG. 4 – Deux représentations du même graphe

Dans tout ce qui suit, les graphes utilisés seront supposés *simples*, c.à.d. sans boucle (une arête qui relie un sommet à lui-même) ni arêtes multiples (plusieurs arêtes qui relient les deux mêmes sommets, et dans le même sens si le graphe est orienté) et, sauf contre-indication, *non orientés*.

1.2 Degré d'un sommet

Le *degré d'un sommet* A est le nombre d'arêtes, noté $d(A)$, qui ont pour extrémité A .

Propriété 1

Pour tout graphe \mathcal{G} , on a :

$$\sum_{A \in \mathcal{S}} d(A) = 2\text{Card}(\mathcal{A})$$

Preuve :

► Il suffit de voir que chaque arête relie deux sommets du graphe, et donc qu'elle est comptée exactement deux fois dans la somme de gauche. ◀

Exercice (Rallye mathématique d'Alsace 1982-1983) : La population d'un village se réunit un jour de fête. Chaque personne serre la main d'un certain nombre d'autres : $0, 1, \dots$, etc mains. Prouver que le nombre de personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personnes est pair.

Solution :

► On considère le graphe simple non orienté \mathcal{G} , dont les sommets sont les villageois, deux quelconques étant reliés par une arête si et seulement s'ils se sont serré la main. Il s'agit alors de prouver que $\sum_{d(A) \text{ impair}} d(A)$ est un nombre pair.

Or, d'après la propriété 1, on a :

$$2\text{Card}(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{S}} d(A) = \sum_{d(A) \text{ pair}} d(A) + \sum_{d(A) \text{ impair}} d(A)$$

$$\text{c.à.d.} \quad \sum_{d(A) \text{ impair}} d(A) = 2\text{Card}(\mathcal{A}) - \sum_{d(A) \text{ pair}} d(A).$$

Mais $\sum_{d(A) \text{ pair}} d(A)$ est pair puisque c'est une somme de nombres pairs, donc $\sum_{d(A) \text{ impair}} d(A)$ est pair. ◀

Exercice : Prouver que, dans tout graphe de $n \geq 2$ sommets, il y a au moins deux sommets qui ont les mêmes degrés.

Solution :

► Puisque le graphe est simple, le degré d'un sommet quelconque appartient à $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Par l'absurde : si les n sommets ont des degrés deux à deux distincts, c'est donc qu'il existe un sommet de degré i pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. En particulier, il existe un sommet A de degré 0, qui n'est donc relié à aucun sommet, et un sommet B de degré $n-1$, qui est relié à tous les sommets autres que lui-même, et en particulier à A . Contradiction. ◀

1.3 Connexité

Si A et B sont deux sommets d'un graphe \mathcal{G} , un *chemin* de A à B est une suite d'arêtes (M_i, M_{i+1}) pour $i = 1, \dots, k - 1$, où $M_1 = A$ et $M_k = B$.

Le nombre d'arêtes qui composent un chemin est appelé la *longueur* du chemin.

On conviendra qu'un sommet est toujours relié à lui-même par un chemin de longueur 0.

Un graphe est dit *connexe* lorsque deux sommets quelconques peuvent être reliés par un chemin.

Si A est un sommet d'un graphe \mathcal{G} , l'ensemble de tous les sommets B pour lesquels il existe un chemin de A à B , est appelée la *composante connexe de A* , et on la note \mathcal{C}_A .

Il est alors facile de vérifier que si A et B sont deux sommets d'un graphe \mathcal{G} (non orienté), alors soit $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}_B$ soit $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B = \emptyset$.

Les sommets d'un tel graphe peuvent alors se répartir en groupes appelés *composantes connexes*, deux à deux disjointes, deux sommets appartenant à une même composante étant reliés par un chemin.

Bien entendu, un graphe ne possède qu'une seule composante connexe si et seulement s'il est lui-même connexe.

Précisons enfin que :

- Si l'on "élimine" uniquement des arêtes de \mathcal{G} ou si l'on élimine certains de ses sommets et toutes les arêtes qui s'y rattachaient, on obtient un nouveau graphe \mathcal{G}' qui est un *sous-graphe* de \mathcal{G} .

- Un *graphe induit* par \mathcal{G} est un graphe obtenu à partir de \mathcal{G} en ne gardant que certains sommets et les arêtes initiales reliant les sommets conservés.

- Si l'on ne fait que remplacer certaines arêtes de \mathcal{G} par des chemins créés en introduisant des nouveaux sommets intermédiaires (par exemple, on remplace l'arête (A, B) par $AM_2 \dots M_k B$, les M_i n'étant pas des sommets initiaux), on obtient un nouveau graphe qui est une *subdivision* de \mathcal{G} (fig.5).

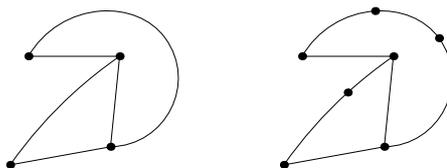


FIG. 5 – Subdivision d'un graphe

Attention, pour une subdivision, on n'a pas le droit de rajouter un sommet qui serait commun à deux arêtes. Par exemple sur la figure 6, le graphe de droite n'est pas une subdivision de celui de gauche.



FIG. 6 – Ceci n'est pas une subdivision

Exercice : Prouver que si \mathcal{G} est un graphe connexe à n sommets, alors \mathcal{G} possède au moins $n - 1$ arêtes.

Solution :

► Par récurrence sur n :

Le résultat est évident pour $n = 1$ et $n = 2$.

Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On suppose que tout graphe connexe de n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.

Soit alors \mathcal{G} un graphe connexe à $n + 1$ sommets. Soit a le nombre d'arêtes de \mathcal{G} .

Notons que la connexité assure que chaque sommet est de degré au moins 1.

- Si chaque sommet est de degré au moins 2, alors la propriété 1 conduit à $2a = \sum_{A \in \mathcal{S}} d(A) \geq 2n$, et donc $a \geq n$.

- S'il existe un sommet de degré 1. Notons le A . Alors, le graphe induit \mathcal{G}' obtenu en éliminant A et l'arête dont il est l'extrémité, est un graphe connexe de n sommets qui possède exactement une arête de moins que \mathcal{G} . D'après l'hypothèse de récurrence, \mathcal{G}' possède donc au moins $n - 1$ arêtes, d'où \mathcal{G} en possède au moins n , ce qui achève la démonstration.

◀

Un *cycle* est un chemin de longueur non nulle qui relie un sommet à lui-même. Pour alléger les notations, un cycle sera juste noté $M_1M_2\dots M_kM_1$, avec $k \geq 3$ (puisque le graphe est supposé simple et non orienté), et où les M_i sont les sommets utilisés, dans cet ordre.

Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle.

Notons alors que dans un arbre, il n'existe qu'un seul chemin entre deux sommets donnés (il y en a au moins un par connexité, et s'il y en avait deux pour des sommets A et B alors, en les mettant bout à bout, on pourrait créer un cycle).

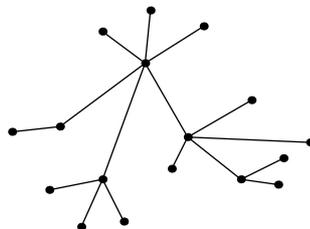


FIG. 7 – Un arbre

Propriété 2

Un graphe à n sommets est un arbre si et seulement s'il est connexe et possède exactement $n - 1$ arêtes.

Preuve :

► On peut tout de suite supposer que $n \geq 2$.

- Si \mathcal{G} est un graphe connexe de n sommets et de $n - 1$ arêtes.

Par l'absurde : supposons que \mathcal{G} possède un cycle, disons $M_1M_2\dots M_kM_1$.

Alors, en supprimant l'arête (M_1, M_2) , on ne brise pas la connexité du graphe (si l'on a besoin de passer de M_1 à M_2 , ou le contraire, il suffit de « faire le tour » via le chemin

$M_2 \dots M_k M_1$). Le nouveau graphe obtenu est donc connexe et possède n sommets et $n - 2$ arêtes, ce qui contredit le résultat de l'exercice précédent.

Donc, \mathcal{G} ne possède pas de cycle, ce qui permet d'affirmer qu'il s'agit bien d'un arbre.

- Prouvons maintenant, par récurrence sur n , que si \mathcal{G} est un arbre à n sommets alors il possède exactement $n - 1$ arêtes.

La conclusion est évidente pour $n = 2$.

Soit $n \geq 2$ fixé. Supposons la conclusion établie pour tout arbre de n sommets.

Soit \mathcal{G} un arbre à $n + 1$ sommets.

On va commencer par prouver que \mathcal{G} possède au moins un sommet de degré 1 :

Par l'absurde : supposons que tous les sommets soient de degrés au moins 2.

Soit alors M_1 un sommet arbitraire. On choisit M_2 parmi les sommets adjacents à M_1 , et on colorie l'arête (M_1, M_2) . On choisit alors un sommet M_3 , adjacent à M_2 selon une arête non encore coloriée (ce qui est possible, puisque $d(M_2) \geq 2$), et on colorie l'arête (M_2, M_3) . Et ainsi de suite, tant que c'est possible, si M_i vient d'être construit et qu'il reste une arête d'extrémité M_i qui n'a pas encore été coloriée, on choisit un sommet noté M_{i+1} parmi ceux qui sont les autres extrémités de telles arêtes, et on colorie l'arête (M_i, M_{i+1}) .

Comme le nombre d'arêtes est fini et que le nombre d'arêtes non coloriées diminue d'une unité à chaque étape, cette procédure va devoir s'arrêter.

Comme \mathcal{G} ne possède pas de cycle, il est impossible qu'un même sommet apparaisse deux fois dans la suite (M_i) .

Soit M_k le dernier sommet construit. Alors, puisque $d(M_k) \geq 2$ et que l'on a colorié qu'une seule arête d'extrémité M_k , c'est donc qu'il en reste encore au moins une non coloriée et qui permet de poursuivre la construction. Contradiction.

Ainsi, \mathcal{G} possède au moins un sommet de degré 1, disons A . Mais alors, en supprimant A et l'arête dont il est une extrémité, on obtient un sous-graphe \mathcal{G}' qui est toujours connexe et sans cycle, c.à.d. un arbre, mais qui possède exactement un sommet et une arête de moins que \mathcal{G} . L'hypothèse de récurrence assure donc que \mathcal{G}' possède exactement $n - 1$ arêtes, et ainsi que \mathcal{G} en possède exactement n . ◀

Remarque : La propriété 2 et l'exercice précédent montrent que les arbres sont les graphes connexes minimaux, au sens du nombre d'arêtes. La propriété suivante montre qu'ils permettent également « d'engendrer » tous les graphes connexes.

Propriété 3

Tout graphe connexe peut s'obtenir par ajout d'un certain nombre d'arêtes à un arbre ayant le même nombre de sommets.

Preuve :

► On raisonne par récurrence sur le nombre n de cycles du graphe.

- Si $n = 0$, notre graphe est un graphe connexe sans cycle. Il s'agit donc d'un arbre et il n'y a rien à faire.

- Soit $n \geq 0$ un entier fixé. Supposons que le résultat soit établi pour tout graphe connexe n'ayant pas plus de n cycles.

Soit donc un graphe connexe \mathcal{G} ayant $n + 1$ cycles.

On considère alors le sous-graphe \mathcal{G}' obtenu en enlevant uniquement l'arête (M_1, M_2) qui appartenait à un cycle $M_1 M_2 \dots M_k M_1$. Il est clair qu'ainsi on brise au moins un cycle parmi ceux de \mathcal{G} . De plus, tous les cycles de \mathcal{G}' sont des cycles de \mathcal{G} , donc \mathcal{G}' possède au

plus n cycles (peut-être en a-t-on brisé plus d'un). Enfin, le graphe \mathcal{G}' est encore connexe, puisque si l'on veut passer de M_1 à M_2 (ou le contraire), il suffit comme ci-dessus de « faire le tour » via le chemin $M_2 \dots M_k M_1$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que \mathcal{G}' peut-être obtenu à partir d'un arbre T par ajout d'un certain nombre d'arêtes. Il suffit alors d'ajouter l'arête (M_1, M_2) pour retrouver \mathcal{G} , ce qui achève la démonstration. ◀

Remarque : Un arbre T qui permet d'obtenir le graphe connexe \mathcal{G} par ajouts successifs d'arêtes est appelé un *arbre recouvrant* de \mathcal{G} . C'est un arbre qui a le même ensemble de sommets que \mathcal{G} . La propriété 3 montre donc que tout graphe connexe possède au moins un arbre recouvrant.

1.4 Graphe complet – Graphe multipartite

Si deux sommets quelconques (distincts) du graphe \mathcal{G} sont reliés par une arête, on dit que le graphe est *complet*. En général, le graphe complet à n sommets est noté \mathcal{K}_n .

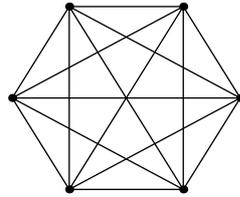


FIG. 8 – Le graphe complet à 6 sommets

Inversement, des sommets d'un graphe forment ce que l'on appelle un *ensemble de sommets indépendants* s'il n'existe aucune arête entre deux quelconques d'entre eux.

Un graphe est dit *bipartite* lorsque ses sommets peuvent être répartis en deux groupes disjoints X et Y de sommets indépendants.

Dans ce cas, une arête ne peut relier qu'un sommet de X et un sommet de Y , mais tous les couples possibles ne sont pas forcément reliés par une arête. Si pourtant c'est le cas, le graphe est alors noté $\mathcal{K}_{X,Y}$ ou $\mathcal{K}_{x,y}$ avec $x = \text{Card}(X)$ et $y = \text{Card}(Y)$.

On définit de manière analogue les graphes *tripartites*, etc..

Par exemple, le graphe considéré dans le problème des trois maisons et des trois usines (exemple a) ci-dessus) est bipartite. Il correspond même à $\mathcal{K}_{3,3}$.

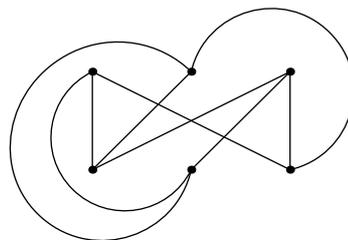


FIG. 9 – Le graphe des maisons et des usines est $\mathcal{K}_{3,3}$

1.5 Exercices

Exercice 1.

- a) Prouver qu'un graphe à n sommets, chacun de degré au moins 2, possède un cycle.
- b) Prouver que si un graphe possède n sommets et au moins n arêtes, alors il possède un cycle.

Exercice 2.

Une fête regroupe n personnes, chacune ayant un ami présent (l'amitié étant réciproque...). Dans tout groupe d'au moins trois personnes, il n'y a jamais exactement deux paires d'amis. Prouver que chaque personne est amie avec toutes les autres.

Exercice 3 (Tournoi des villes 1982).

Dans un pays, il y a au moins 101 villes, et des liaisons aériennes directes (aller-retour) existent entre certaines d'entre elles. La capitale du pays est ainsi reliée à 100 villes, et chaque autre ville possède 10 liaisons aériennes différentes. Il est possible de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre par les liaisons aériennes, en transitant éventuellement par d'autres villes. Prouver qu'il est possible de fermer la moitié des liaisons aériennes de la capitale tout en préservant la capacité de voyager d'une ville à l'autre.

Exercice 4 (Tournoi des villes 1995).

Prouver que, dans tout groupe de 50 personnes, il en existe toujours au moins deux qui ont un nombre pair (éventuellement nul) de connaissances communes dans le groupe (la relation « se connaître » est considérée comme réciproque, et hélas!, on ne se connaît jamais soi-même).

Exercice 5 (Tournoi des villes 1985).

Les nombres 0, 1, 2, ..., 9 sont écrits 10 fois chacun dans un tableau 10×10 . Prouver qu'il existe une ligne ou une colonne qui contient plus de trois nombres différents.

Exercice 6 (Tournoi des villes 1991).

Au goûter, n enfants désirent se partager équitablement m barres chocolatées identiques, aucune de ces barres ne devant être coupée plus d'une fois.

Prouver que, cela est réalisable si et seulement si : $m \geq n$ ou $\begin{cases} m < n \\ m = n - \text{pgcd}(m, n) \end{cases}$.

Exercice 7 (Tournoi des villes 1980).

Dans chaque case d'un tableau de $n \times n$ cases-unités, on a inscrit un nombre. Deux lignes quelconques sont toujours différentes (c.à.d. il existe au moins une colonne qui rencontre ces lignes selon des nombres différents). Prouver qu'il existe une colonne que l'on peut effacer de sorte que, dans le tableau $n \times (n - 1)$ restant, les lignes soient encore deux à deux différentes.

Exercice 8 (Olympiade Union-Soviétique 1986).

Un roi décide de construire n villes et $n - 1$ routes les reliant afin de pouvoir se déplacer d'une ville quelconque à une autre. Chaque route relie deux villes sans en traverser d'autre, et deux routes n'ont pas d'intersection. Le roi veut aussi que les plus petites distances entre les villes (le long des routes) soient 1, 2, 3, ..., $\frac{n(n-1)}{2}$ kilomètres. Est-ce possible pour :

- a) $n = 6$?
- b) $n = 1986$?

Exercice 9 (USA 1999).

Des jetons sont placés sur un tableau carré de $n \times n$ cases-unités de façon à satisfaire les règles suivantes :

(a) Toute case qui ne contient pas un jeton possède un côté commun avec une case qui en contient un.

(b) Pour toute paire de cases $\{c, c'\}$ qui contiennent chacune un jeton, il existe une suite de cases contenant chacune un jeton, qui commence par c et se termine par c' , et telles que deux cases consécutives de la suite ont toujours un côté en commun.

Prouver qu'il y a au moins $\frac{n^2-3}{2}$ jetons.

2 Graphes planaires – formule d'Euler

Revenons sur l'exemple a) de départ :

Est-il possible de relier chacune des trois maisons à chacune des trois usines de sorte que deux conduites quelconques ne se croisent jamais ?

Nous avons déjà considéré le graphe bipartite dont les sommets sont les trois maisons et les trois usines, et dont les arêtes sont les conduites. La question est donc de savoir s'il est possible de représenter ce graphe dans le plan de sorte que les arêtes soient symbolisées par des arcs de courbes qui ne se coupent pas.

Un graphe dont l'on peut représenter les sommets par des points du plan et les arêtes par des arcs de courbes qui ne s'intersectent pas est un *graphe planaire* (et dans ces conditions, une telle représentation sera dite planaire).

Attention, puisqu'un même graphe peut être représenté de plusieurs façons différentes, ce n'est pas parce qu'une de ces représentations n'est pas planaire que le graphe ne l'est pas. Un graphe est planaire lorsqu'il admet *au moins une* représentation planaire.

Notre problème consiste donc à savoir si notre graphe est planaire ou non.

Soit \mathcal{G} un graphe planaire dont on possède une représentation planaire. Les arêtes délimitent des régions du plan. Une *face* du graphe est alors une région maximale (au sens de l'inclusion) qui ne contient ni de sommet qui soit l'extrémité d'une arête, ni de partie d'arête.

Notons qu'en particulier, si \mathcal{G} possède un nombre fini de sommets alors la représentation planaire possède une face non bornée.

Théorème 4 (Formule d'Euler – 1758)

Soit \mathcal{G} un graphe simple planaire connexe dont une représentation planaire possède s sommets, a arêtes et f faces. Alors :

$$s - a + f = 2$$

Si \mathcal{G} n'est plus supposé connexe mais possède k composantes connexes alors :

$$s - a + f = 1 + k$$

Preuve :

► Soit \mathcal{G} un graphe planaire connexe. D'après la propriété 3, il suffit de prouver que la formule est vraie pour les arbres, et que la quantité $s - a + f$ reste invariante par ajout d'une

arête. On peut noter que tout graphe qui permet de construire \mathcal{G} par ajout d'arête est lui-même planaire, puisqu'une représentation planaire de ce graphe se déduit immédiatement d'une représentation planaire de \mathcal{G} en éliminant les arêtes en trop.

- Pour un arbre : On a vu que s'il y a s sommets alors il y a $a = s - 1$ arêtes (cf. propriété 2). De plus, la seule face est la face non bornée, puisque toute face bornée ferait apparaître un cycle. Donc $f = 1$.

Et ainsi, on a $s - a + f = s - (s - 1) + 1 = 2$.

- Si la formule est vraie pour un graphe connexe planaire \mathcal{G}' de s' sommets, a' arêtes et f' faces, et que l'on ajoute une arête sans briser la planarité. Le nouveau graphe possède $s = s'$ sommets, $a = a' + 1$ arêtes. De plus, la nouvelle arête partage une face en deux nouvelles faces (puisque'elle ne traverse aucune autre arête, elle est entièrement contenue dans une des anciennes faces. De plus, puisque \mathcal{G}' est connexe, aucune extrémité de cette arête n'était isolée), et donc le nouveau graphe possède $f = f' + 1$ faces.

Et on a $s - a + f = s' - (a' + 1) + (f' + 1) = 2$.

Supposons maintenant que \mathcal{G} ait k composantes connexes. Puisqu'elles sont deux à deux disjointes, on peut les représenter de sorte que chacune appartienne à la face non bornée de chacune des autres. On peut utiliser la formule précédente pour chacune des composantes connexes. En sommant toutes ces relations, la somme des nombres de sommets (resp. d'arêtes) donne exactement le nombre total de sommets (resp. d'arêtes) de \mathcal{G} , et la somme des faces donne exactement le nombre total de faces de \mathcal{G} augmenté de $k - 1$ unités puisque la face non bornée a été comptée k fois en tout. On obtient donc $s - a + f + (k - 1) = 2k$, c.à.d. $s - a + f = 1 + k$. ◀

Remarques : On peut noter que la formule d'Euler assure entre autre que toute représentation d'un graphe fini planaire connexe utilisera le même nombre de faces. C'est pourquoi, dans ce qui suit, on parlera directement du nombre de faces d'un graphe planaire connexe sans plus faire référence à une quelconque représentation planaire.

On peut prouver que la formule d'Euler reste vraie, même si le graphe possède des boucles (ou si l'on veut tracer le graphe sur une sphère plutôt que dans le plan).

Exercice : Prouver qu'il est impossible raccorder les trois maisons aux trois usines sans que deux conduites se croisent.

Solution :

▶ Par l'absurde : supposons que le graphe connexe des trois maisons et trois usines soit planaire.

On a $s = 6$, $a = 9$. De plus, puisque le graphe est bipartite (on ne relie pas deux maisons entre elles, ni deux usines entre elles), aucune des faces n'est un triangle, et la face non bornée n'est pas non plus délimitée par trois arêtes. Ainsi, toute face utilise au moins 4 arêtes, chacune servant pour deux faces. D'où l'inégalité $2a \geq 4f$.

Cela conduit à $f \leq \frac{9}{2}$. Or, d'après la formule d'Euler, on a $f = 2 + a - s = 5$. Contradiction. ◀

Remarque : Ce résultat s'énonce : Le graphe $\mathcal{K}_{3,3}$ n'est pas planaire.

Propriété 5

Soit \mathcal{G} un graphe (simple) planaire à s sommets et a arêtes. On a :

$$a \leq 3s - 6$$

Preuve :

► Notons que d'après la formule d'Euler, que \mathcal{G} soit connexe ou non, on a $s + f \geq a + 2$.

Puisque \mathcal{G} est simple, chacune de ses faces utilise au moins 3 arêtes. Réciproquement, chaque arête intervient sur deux faces. Ainsi, on a $3f \leq 2a$. En reportant dans la relation d'Euler, il vient $2 + a \leq s + f \leq s + \frac{2}{3}a$. Et ainsi : $a \leq 3s - 6$. ◀

Exercice : Prouver que le graphe \mathcal{K}_5 n'est pas planaire.

Solution :

► Le graphe \mathcal{K}_5 est un graphe connexe à $s = 5$ sommets et $a = 10$ arêtes. Comme $10 > 3 \times 5 - 6$, il ne vérifie pas l'inégalité de la propriété 5, et ne peut donc pas être planaire. ◀

Comme on vient de le voir, la formule d'Euler permet de prouver qu'un graphe connexe n'est pas planaire, mais elle ne permet pas de prouver qu'un graphe est planaire. La question de la planarité ou non d'un graphe a été résolue par Kuratowski : On vient de voir que ni $\mathcal{K}_{3,3}$ ni \mathcal{K}_5 ne sont planaires. Il est facile d'en déduire que tout graphe qui contiendrait une subdivision de l'un des ces deux graphes comme sous-graphe n'est pas non plus planaire. Le théorème de Kuratowski affirme que la réciproque est vraie. Mais ce théorème est assez délicat à prouver, nous ne ferons donc que le mentionner ici.

Théorème 6 (Kuratowski – 1930)

Un graphe est planaire si et seulement s'il ne contient pas de subdivision de $\mathcal{K}_{3,3}$ ou de \mathcal{K}_5 .

2.1 Exercices

Exercice 10.

Prouver que, pour un graphe planaire de s sommets et a arêtes et dont aucune face n'est un triangle, on a $a \leq 2s - 4$.

Exercice 11 (Olympiade de St-Petersbourg).

Dans un pays, 11 villes sont reliées deux à deux directement soit par une autoroute soit par une ligne de chemin de fer (qui fonctionnent dans les deux sens). Prouver qu'il existe forcément un pont sur lequel soit une autoroute passe au-dessus d'une autre, soit une voie de chemin de fer passe au-dessus d'une autre.

Exercice 12.

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère le graphe simple \mathcal{G}_n dont les sommets sont les entiers de 1 à n , les sommets a et b étant reliés par une arête si et seulement si $a + b$ est un nombre premier (et donc 1 n'est pas relié à lui-même).

Déterminer les entiers n pour lesquels \mathcal{G}_n est planaire.

Exercice 13.

a) Prouver que si \mathcal{G} est un graphe simple connexe et planaire, ayant un nombre fini de sommets, alors \mathcal{G} possède au moins un sommet de degré ne dépassant pas 5.

b) Cela reste-t-il vrai si \mathcal{G} n'est plus supposé connexe ?

Exercice 14.

Soient P_1, \dots, P_n des points distincts du plan. On note d la plus petite distance non nulle entre deux de ces points. Prouver qu'il n'y a pas plus de $3n - 6$ paires $\{P_i, P_j\}$ pour lesquelles $P_i P_j = d$.

Exercice 15.

On considère un ensemble E fini de points du plan, trois jamais alignés et quatre jamais cocycliques.

Si A et B sont deux points distincts appartenant à E , on dira que la paire $\{A, B\}$ est *bonne* s'il existe un disque fermé qui contienne uniquement A et B .

On note $f(E)$ le nombre de bonnes paires formées par les éléments de E .

Prouver que, si $\text{Card}(E) = 1003$ alors $2003 \leq f(E) \leq 3003$.

3 Coloriages

3.1 Nombre chromatique

Un *coloriage* du graphe \mathcal{G} consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets. Le coloriage est dit *propre* lorsque deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur.

S'il existe une coloration propre de \mathcal{G} à l'aide k couleurs, on dira que \mathcal{G} est k -colorable.

Le plus petit entier k (s'il existe) pour lequel \mathcal{G} est k -colorable est appelé le *nombre chromatique* de \mathcal{G} , et on le note $\chi(\mathcal{G})$.

Notons que l'existence de $\chi(\mathcal{G})$ est assurée dans le cas où le graphe ne possède qu'un nombre fini de sommets (mais, bien entendu, ce n'est pas une condition nécessaire).

Revenons à l'exemple b) de l'introduction :

Comme évoqué alors, construisons le graphe dont les sommets sont les produits chimiques, deux étant reliés si et seulement *s'ils ne peuvent pas* être transportés ensemble. Transporter un des produits dans un camion revient à attribuer un numéro ou une couleur à ce produit (celui du camion correspondant). Ainsi, tous les produits d'une même couleur seront transportés dans un même camion. Les conditions de sécurité imposent donc d'attribuer ces couleurs de sorte que deux produits adjacents n'aient pas la même couleur. Ce faisant, on construit donc un coloriage propre du graphe, et le problème consistant à n'utiliser que le moins possible de camions revient à déterminer le nombre chromatique du graphe.

Exercice : Déterminer le nombre chromatique des graphes de la figure 10 (les réponses sont données au 3.2).

On ne connaît pas de formule simple qui permette de déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque. Il est clair que si le graphe \mathcal{G} possède n sommets, on a $\chi(\mathcal{G}) \leq n$ (une couleur par sommet) et que l'égalité a lieu si $\mathcal{G} = \mathcal{K}_n$. Pourtant, en général, cette majoration est très mauvaise, et on peut essayer de l'améliorer en utilisant des coloriages plus fins, ou en essayant de faire intervenir des informations sur la structure de \mathcal{G} .

La plupart des évaluations de $\chi(\mathcal{G})$ proviennent d'algorithmes de coloriages. Il en existe beaucoup, et pour ne pas nous noyer avec cette question, nous nous bornerons à présenter le plus célèbre d'entre eux.

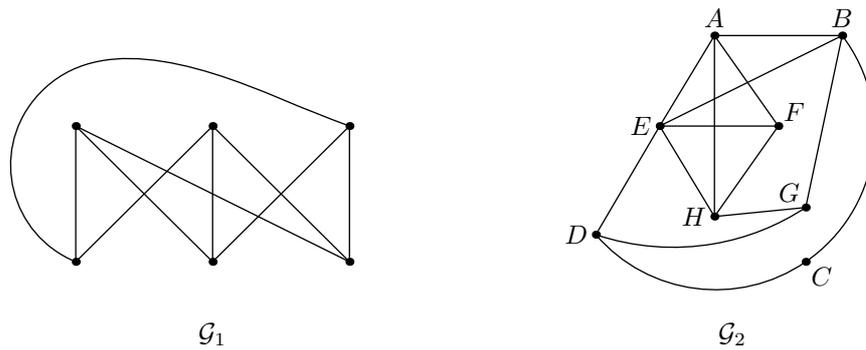


FIG. 10 – Déterminer le nombre chromatique de ces graphes

3.2 L’algorithme glouton

Il s’agit de l’algorithme de coloriage suivant :

Soit \mathcal{G} un graphe de n sommets. On ordonne les sommets M_1, M_2, \dots, M_n selon les degrés décroissants (i.e. pour tout $i : d(M_i) \geq d(M_{i+1})$).

Tant qu’il reste des sommets à colorier, on exécute les deux actions suivantes :

a) Chercher dans la liste ordonnée des sommets le premier sommet non encore colorié et le colorier d’une nouvelle couleur.

b) Colorier avec cette même couleur, et en respectant leur ordre dans la liste, tous les sommets non encore coloriés qui ne sont pas adjacents au sommet précédent et ni adjacents entre eux.

Il est clair que, puisque le nombre de sommets non coloriés diminue d’au moins une unité à chaque fois que l’on exécute les points a) et b), cette procédure va se terminer et fournir un coloriage propre (cf. b)) de \mathcal{G} .

Mais examinons-le d’un peu plus près :

Soit M le dernier sommet colorié. Si M n’a pas été colorié avant, c’est que pour chacune des couleurs précédentes, un sommet adjacent à M a été colorié de cette couleur. Par suite, le nombre de couleurs utilisées avant de colorier M ne peut dépasser $d(M)$. Et donc, en tenant compte de la couleur de M , on déduit que le nombre total de couleurs utilisées par l’algorithme ne dépasse pas $d(M) + 1$.

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 7

Soit \mathcal{G} un graphe de n sommets. On note $\Delta(\mathcal{G})$ le degré maximal d’un sommet de \mathcal{G} .

Alors :

$$\chi(\mathcal{G}) \leq \Delta(\mathcal{G}) + 1$$

Remarque : Attention, l’algorithme glouton permet d’obtenir un coloriage propre plus finaud que l’attribution d’une couleur à chaque sommet. Par contre, il n’y a aucune raison pour que le coloriage ainsi obtenu soit réalisé avec le moins de couleurs possible. Autrement dit, *a priori*, il ne donne pas $\chi(\mathcal{G})$.

Solution (de l’exercice du 3.1.) :

► Le graphe \mathcal{G}_1 est celui des trois maisons et trois usines. Comme il est bipartite, il suffit de donner une couleur aux trois maisons et une autre aux trois usines pour obtenir une bicoloration de \mathcal{G}_1 . Ainsi, $\chi(\mathcal{G}_1) \leq 2$. L'inégalité inverse étant évidente (il y a au moins une arête), donc $\chi(\mathcal{G}_1) = 2$.

Utilisons l'algorithme glouton pour majorer $\chi(\mathcal{G}_2)$:

Un classement des sommets dans l'ordre des degrés décroissants est E, A, B, H, D, F, G, C .

On attribue donc la couleur c_1 à E, G et C . Puis, la couleur c_2 à A et D . Puis, la couleur c_3 à B et H . Et enfin, la couleur c_4 à F . On en déduit que $\chi(\mathcal{G}_2) \leq 4$.

Mais, en observant le graphe, on constate que le graphe induit \mathcal{G}'_2 dont les sommets sont A, E, F, H est un sous-graphe complet. Puisqu'une coloration de \mathcal{G}_2 induit une coloration de \mathcal{G}'_2 , on doit avoir $\chi(\mathcal{G}_2) \geq 4$. Et finalement, $\chi(\mathcal{G}_2) = 4$. ◀

3.3 Le polynôme chromatique d'un graphe

Un graphe \mathcal{G} étant fixé, on se donne une palette de k couleurs. On peut alors se demander de combien de façons on peut k -colorier \mathcal{G} . La propriété suivante apporte des éléments de réponse.

Propriété 8

Soit \mathcal{G} un graphe simple de n sommets. Il existe un polynôme P , de degré n et à coefficients entiers, tel que, pour tout k , le nombre de k -colorations de \mathcal{G} soit $P(k)$.

Ce polynôme P est appelé le polynôme chromatique de \mathcal{G} .

Preuve :

► Si \mathcal{G} est un graphe simple de n sommets et a arêtes, on définit la *taille* de \mathcal{G} comme étant égale à $n + a$.

Soit $e = (A, B)$ une arête de \mathcal{G} .

Contracter e signifie qu'à partir de \mathcal{G} , on construit un nouveau graphe, noté $\mathcal{G} \cdot e$, dans lequel les sommets A et B sont remplacés par un sommet unique, relié par une arête à chacun des sommets qui étaient adjacents à A ou B , mais une seule fois et en éliminant e (ce qui assure que $\mathcal{G} \cdot e$ est simple).

Par commodité, on notera $\mathcal{G} \setminus e$ le sous-graphe de \mathcal{G} obtenu en éliminant l'arête e .

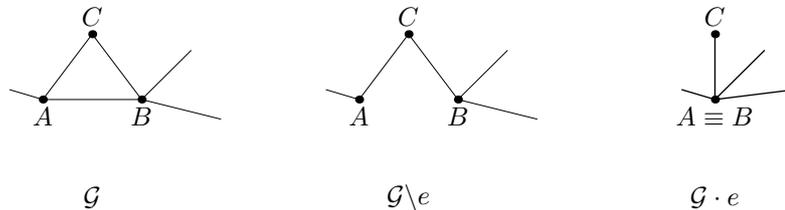


FIG. 11 – Contraction d'une arête

On va maintenant prouver le résultat par récurrence sur la taille t de \mathcal{G} :

Si \mathcal{G} est de taille $t = 1$, c'est qu'il est constitué d'un unique sommet. Dans ce cas, pour tout entier k , le nombre de k -colorations est alors clairement égal à k .

Soit $t \geq 1$ fixé. On suppose la conclusion établie pour tout graphe simple de taille au plus égale à t .

Soit \mathcal{G} un graphe simple de taille $t + 1$.

- Si \mathcal{G} ne possède aucune arête alors, on peut attribuer n'importe laquelle des k couleurs à chacun des $n = t + 1$ sommets, il en résultera toujours une k -coloration. Par suite, le nombre de k -colorations de \mathcal{G} est directement k^n , ce qui est bien un polynôme en k , de degré n et à coefficients entiers.

- Si \mathcal{G} possède au moins une arête : notons qu'alors $1 \leq a < t$ et $2 \leq n \leq t$.

Soit $e = (A, B)$ une arête de \mathcal{G} . Les graphes $\mathcal{G} \setminus e$ et $\mathcal{G} \cdot e$ sont donc tous les deux des graphes simples de tailles respectives ne dépassant pas t . D'après l'hypothèse de récurrence, on peut alors considérer les polynômes chromatiques de $\mathcal{G} \setminus e$ et $\mathcal{G} \cdot e$, que l'on notera respectivement Q et R . On sait de plus que Q et R sont à coefficients entiers, que $d^\circ Q = n$ et $d^\circ R = n - 1$. Si l'on montre que, pour tout k , le nombre de k -colorations de \mathcal{G} est $Q(k) - R(k)$, la conclusion sera assurée.

Considérons les k -colorations arbitraires de $\mathcal{G} \setminus e$ pour lesquelles les sommets A et B sont de couleurs différentes :

A partir d'une telle k -coloration de $\mathcal{G} \setminus e$, on obtient une unique k -coloration de \mathcal{G} en rétablissant e , ce procédé d'association étant clairement bijectif. Il y a donc autant de k -colorations de $\mathcal{G} \setminus e$ de ce type qu'il y a de k -colorations de \mathcal{G} .

Considérons les k -colorations arbitraires de $\mathcal{G} \setminus e$ pour lesquelles les sommets A et B sont de la même couleur :

Cette fois, à partir d'une k -coloration de ce type, la contraction de e permet d'en déduire une k -coloration de $\mathcal{G} \cdot e$, la couleur commune étant attribuée au nouveau sommet. A nouveau, ce procédé d'association est manifestement une bijection de l'ensemble des k -colorations de $\mathcal{G} \setminus e$ de ce type sur l'ensemble des k -colorations de $\mathcal{G} \cdot e$, ce qui assure que le nombre de k -colorations de $\mathcal{G} \setminus e$ dans ce deuxième cas est égal à $R(k)$.

On en déduit donc que : $Q(k) = R(k) +$ nombre de k -colorations de \mathcal{G} , ce qui était notre objectif. ◀

Exercice : Déterminer le polynôme chromatique d'un arbre à n sommets.

Solution :

▶ Le polynôme chromatique d'un arbre de n sommets est $P(k) = k(k - 1)^{n-1}$.

On raisonne par récurrence sur n :

Si $n = 1$, on a déjà vu que $P(k) = k$.

Soit $n \geq 1$ fixé. On suppose que, pour tout arbre de n sommets, on a $P(k) = k(k - 1)^{n-1}$.

Soit alors T un arbre de $n + 1$ sommets, et k un entier. On sait que T possède au moins un sommet de degré 1 (cf. exercice 1), disons A . En éliminant A et l'arête dont il est une extrémité, on obtient un arbre T' de n sommets dont le nombre de k -colorations est $k(k - 1)^{n-1}$ (d'après l'hypothèse de récurrence). Pour chacune de ces k -colorations, on peut construire $k - 1$ k -colorations de T , en attribuant à A n'importe quelle couleur autre que celle déjà attribué au seul sommet qui lui est adjacent. Toutes les k -colorations de T obtenues ainsi sont clairement deux à deux distinctes, ce qui donne un total de $k(k - 1)^n$ k -colorations possibles de T . Or, il est évident qu'une k -coloration de T peut toujours être considérée comme une coloration de T' à laquelle on a associé une coloration pertinente de A , ce qui assure que le décompte ci-dessus recouvre toutes les k -colorations de T . ◀

Exercice : Déterminer le polynôme chromatique d'un carré.

Solution :

► On utilise la méthode mise en place dans le théorème, en choisissant $e = (A, B)$:

Si on supprime e , le graphe obtenu est alors un arbre à quatre sommets. On vient de voir que le nombre de k -colorations de cet arbre est $k(k-1)^3$.

Si l'on contracte e , le graphe obtenu est un triangle, c.à.d. \mathcal{K}_3 . Il y a alors autant de k -colorations de \mathcal{K}_3 que d'arrangements de trois couleurs parmi les k possibles (l'ordre est important puisqu'il faut savoir quel sommet reçoit quelle couleur, et on n'a pas droit de choisir deux fois la même couleur), soit donc $k(k-1)(k-2)$.

Par suite, le polynôme chromatique du carré est :

$$P(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$

◀

3.4 Coloriages d'arêtes

Parfois, les relations entre les sommets sont de natures différentes. Il peut être judicieux de conserver le côté pratique d'une représentation par un graphe, mais en symbolisant les divers types de relations par des arêtes de couleurs différentes.

Exemple : Dans une soirée à laquelle participent n personnes, certaines sont amies, d'autres sont ennemies et certaines ne se connaissent pas.

Puisqu'il y a trois types de relations, on peut choisir de représenter la situation par un graphe non orienté (on suppose qu'une relation quelconque est symétrique) de n sommets, un par personne, et de relier ces sommets par une arête bleue, rouge ou verte selon que les deux personnes en question sont amies, ennemies ou indifférentes.

Exercice : Prouver que dans toute soirée de 6 personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas deux à deux.

Solution :

► Si l'on considère le graphe complet \mathcal{K}_6 dont les sommets sont les personnes, et les arêtes entre deux personnes qui se connaissent sont en bleu, et celles entre personnes qui ne se connaissent pas sont en rouge, la question est alors de prouver qu'il existe un triangle monochromatique.

Or, si A est une personne fixée. Parmi les 5 arêtes d'extrémité A , le principe des tiroirs assure qu'au moins trois sont d'une même couleur, disons bleue (le raisonnement s'adapte sans difficulté à l'autre cas) et que les personnes soient B, C, D . Alors, soit l'une des trois arêtes reliant B, C et D est bleue et, avec A , on forme ainsi un triangle bleu. Soit, ces trois arêtes sont rouges, et forment alors un triangle rouge. ◀

3.5 Introduction aux problèmes extrémaux

Donnons-nous n points du plan, trois jamais alignés. On trace des segments reliant certains de ces points. Il est clair que, quels que soient nos choix, à force de tracer des segments on finira par faire apparaître au moins un triangle dont les sommets sont parmi les points initiaux. La question est de savoir quel est le nombre maximal de segments que l'on puisse tracer sans qu'un tel triangle existe. On peut aussi voir le problème sous la forme : quel est le nombre minimal de segments qui assure de l'existence d'un triangle, et ce quelle que soit la façon dont on va ensuite choisir les segments ?

De façon générale, un problème extrémal est un problème du type « Déterminer le plus petit (ou le plus grand) entier k pour lequel la propriété suivante est vraie : ... »

L'un des premiers problèmes de ce type a été résolu par Túran. Nous ne l'énonçons ici que dans le cas des triangles évoqué ci-dessus (ce cas particulier avait été obtenu par Mantel quelques années plus tôt). Le cas général est renvoyé à l'exercice 18.

Théorème 9 (Mantel – 1906 & Túran – 1941)

Soit \mathcal{G} un graphe simple et non orienté à n sommets ne contenant pas de triangle. Alors, \mathcal{G} ne possède pas plus de $\frac{n^2}{4}$ arêtes, avec égalité si et seulement si n est pair et $\mathcal{G} = \mathcal{K}_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

Preuve :

► Commençons par remarquer que si x, y sont deux réels, on a : $(\frac{x+y}{2})^2 \geq xy$, avec égalité si et seulement si $x = y$. En effet, cela revient à remarquer que $(\frac{x-y}{2})^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = y$.

Soit alors I un ensemble de sommets indépendants (voir 1.4) de taille maximale. On note $x = \text{Card}(I)$.

Soit $J = \mathcal{S} \setminus I$ l'ensemble des sommets qui ne sont pas dans I . Alors $\text{Card}(J) = y = n - x$.

Si \mathcal{G} ne contient pas de triangle alors :

Pour tout sommet A , il n'y a pas deux sommets, parmi ceux qui sont adjacents à A , qui soient adjacents entre eux. C.à.d. les sommets qui sont adjacents à A forment un ensemble de sommets indépendants. On en déduit immédiatement que, pour tout sommet A on a : $d(A) \leq x$.

D'autre part, toute arête de \mathcal{G} a une de ses extrémités dans J (sinon, elle aurait ses deux extrémités dans I , en contradiction avec le fait que I est un ensemble de sommets indépendants). Par contre, il est possible que deux sommets de J soient reliés par une arête. En notant a le nombre d'arêtes de \mathcal{G} , cela conduit à l'inégalité : $a \leq \sum_{A \in J} d(A)$.

Et finalement : $a \leq \sum_{A \in J} d(A) \leq \sum_{A \in J} x = xy \leq (\frac{x+y}{2})^2 = \frac{n^2}{4}$.

L'égalité a lieu si et seulement si chacune des inégalités intermédiaires est une égalité, c.à.d. si et seulement si $x = y = \frac{n}{2}$, que chaque sommet $A \in J$ est de degré x et que J forme aussi un ensemble de sommets indépendants.

C.à.d. n est pair et les sommets sont répartis en deux groupes de $\frac{n}{2}$ sommets, chacun formant un ensemble de sommets indépendants, et les arêtes reliant chaque sommet d'un groupe à chaque sommet de l'autre et eux seuls.

C.à.d. n est pair et $\mathcal{G} = \mathcal{K}_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ ◀

3.6 Exercices

Exercice 16.

Soit $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$ le graphe simple dont les sommets sont tous les entiers strictement positifs, les sommets a et b étant reliés si et seulement si $a + b$ est un nombre premier. Déterminer le nombre chromatique de $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 17 (Théorème des 6 couleurs).

Prouver que tout graphe simple planaire \mathcal{G} ayant un nombre fini de sommets, on a $\chi(\mathcal{G}) \leq 6$.

Exercice 18 (Théorème de Túrán).

Une k -clique est un sous-graphe complet à k sommets (par exemple, pour $k = 3$: un triangle).

Soit \mathcal{G} un graphe simple non orienté de n sommets et a arêtes qui ne contient pas de k -clique (où $k \geq 3$ fixé).

Prouver que : $a \leq \frac{k-2}{k-1} \times \frac{n^2}{2}$.

Exercice 19 (Japon 1998).

Un pays possède 1998 aéroports. Dans tout groupe de trois aéroports, au moins deux ne sont pas reliés par un vol direct (aller-retour). Quel le nombre maximum de vols directs dans ce pays ?

Exercice 20 (Tournoi des villes 1986).

On dispose 21 points sur un cercle. Prouver que, parmi les cordes qui relient deux quelconques de ces points, au moins 100 définissent un angle au centre du cercle ne dépassant pas 120° .

Exercice 21 (Pologne 1997).

On donne $n \geq 2$ points sur un cercle de rayon 1. Prouver qu'il n'y a pas plus de $\frac{n^2}{3}$ paires de points situés à une distance strictement supérieure à $\sqrt{2}$.

Exercice 22 (OIM 2003).

Soit A un sous-ensemble de l'ensemble $S = \{1, 2, \dots, 1\,000\,000\}$ ayant exactement 101 éléments. Montrer qu'il existe des nombres t_1, t_2, \dots, t_{100} dans S , tels que les ensembles $A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}$ pour $j = 1, 2, \dots, 100$ soient deux à deux disjoints.

Exercice 23.

a) Dans un groupe de 17 personnes, deux quelconques sont toujours amies, ou ennemies, ou indifférentes l'une à l'autre (chacun de ces sentiments étant partagés par les deux personnes en question). Prouver qu'il existe un groupe de trois personnes qui ont deux à deux les mêmes sentiments les unes envers les autres.

b) Dans un groupe de 18 personnes, deux quelconques sont toujours amies ou ennemies. Prouver qu'il existe quatre de ces personnes qui ont toutes les mêmes sentiments les unes envers les autres.

Exercice 24 (Théorème de König).

Soit \mathcal{G} un graphe de n sommets. Prouver que \mathcal{G} admet une bicoloration si et seulement s'il ne possède pas de cycle de longueur impaire.

Exercice 25 (Proposé OIM 1983).

Dix compagnies aériennes desservent un total de 1983 villes. Entre deux villes quelconques, il existe toujours au moins une compagnie pour offrir un vol direct entre ces deux villes (dans les deux sens). Prouver qu'au moins une des compagnies aériennes propose un voyage qui consiste en un circuit fermé ayant un nombre impair d'étapes.

Exercice 26 (Hong-Kong 1998).

Des étudiants ont passé une série d'examens portant sur $n \geq 3$ matières. Pour chacune des matières, exactement trois des étudiants ont eu la meilleure note dans cette matière, et pour deux matières différentes quelconques, un et un seul étudiant a eu la meilleure note dans ces deux matières. Déterminer le plus petit n pour lequel ces conditions impliquent qu'un même étudiant ait eu la meilleure note dans chacune des matières.

Exercice 27 (Le théorème des 5 couleurs).

Prouver que, pour tout graphe simple planaire \mathcal{G} de n sommets, on a $\chi(\mathcal{G}) \leq 5$.
(Indication : Utiliser exercice 13)

4 Parcours sur un graphe

4.1 Chemins eulériens

Le problème des ponts de Königsberg est considéré comme le premier problème historique utilisant explicitement les graphes.

La ville de Königsberg possédait 7 ponts, disposés selon le plan de la figure 12.

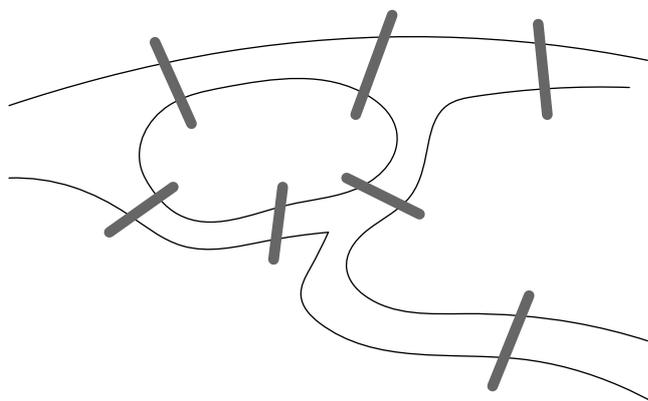


FIG. 12 – Les ponts de Königsberg

Le dimanche, les habitants de la ville se promenaient, et souhaitaient utiliser un parcours fermé passant une fois et une seule sur chaque pont. Mais est-il possible de trouver un tel parcours ?

C'est Euler qui a résolu ce problème, par la négative.

Un chemin (resp. un cycle) sur le graphe \mathcal{G} sera dit *eulérien* s'il utilise une et une seule fois chaque arête de \mathcal{G} .

Un *graphe eulérien* est un graphe qui possède un cycle eulérien.

Théorème 10 (Euler – 1741 & Hierholzer – 1873)

Un graphe connexe, simple ou non, est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Preuve :

► Notons tout d'abord que le graphe n'est pas supposé simple. Mais on peut s'y ramener en subdivisant chaque boucle et chacune des arêtes multiples (un sommet par arête). Cela ne modifie le degré d'aucun des sommets initiaux, et chacun des sommets introduits est alors de degré 2. Nous prouvons donc le résultat dans l'hypothèse où G est simple.

- Si \mathcal{G} est eulérien, on peut donc considérer un cycle eulérien \mathcal{C} . Lorsque l'on parcourt \mathcal{C} une fois en entier, en chaque sommet intermédiaire on arrive par une arête et on repart

par une autre, ce qui contribue à deux unités dans le degré de ce sommet. Et si l'on revient sur ce même sommet plus loin dans le parcours, c'est en utilisant des arêtes différentes de celles déjà utilisées (puisque le cycle est eulérien). Ainsi, excepté éventuellement pour le sommet de départ et le sommet final, chaque sommet du graphe est de degré pair. Or, ces deux sommets extrêmes sont confondus puisqu'il s'agit d'un cycle, notons ce sommet A . L'ensemble des arêtes du cycle, exceptées la première et la dernière (dans l'ordre du parcours), contribuent pour un nombre pair d'unités dans la valeur de $d(A)$. Et, comme le graphe est sans boucle, A n'est ni le second ni l'avant dernier sommet, et donc dans ce calcul les deux arêtes extrêmes ne sont pas comptabilisées. Ainsi, en comptant ces deux arêtes, on trouve bien que $d(A)$ est pair, ce qui assure que tous les sommets du graphe sont de degré pairs.

- On prouve la réciproque par récurrence sur le nombre n d'arêtes du graphe.

Pour $n = 0$, chaque sommet du graphe est isolé, et il n'y a rien à faire.

Soit $n \geq 0$ un entier fixé. On suppose que tout graphe connexe de pas plus de n arêtes dont tous les sommets sont de degré pair est eulérien.

Soit maintenant un graphe connexe \mathcal{G} de $n + 1$ arêtes, dont tous les sommets sont de degré pair, et donc supérieurs ou égaux à 2 (pour raison de connexité). Comme dans l'exercice 1, on en déduit que \mathcal{G} possède un cycle \mathcal{C} . Soit \mathcal{G}' le sous-graphe obtenu en éliminant les arêtes de \mathcal{C} . Cette élimination fait diminuer le degré de chaque sommet d'un nombre pair d'unités (plus exactement de deux fois le nombre d'apparitions dans \mathcal{C} du sommet considéré) par rapport à sa valeur initiale dans \mathcal{G} . Ainsi, chaque sommet de \mathcal{G}' est encore de degré pair. On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence, non pas sur \mathcal{G}' qui n'a aucune raison d'être connexe, mais sur chacune de ses composantes connexes. Ainsi, pour chacune des composantes connexes de \mathcal{G}' , on peut considérer un cycle eulérien (éventuellement de longueur 0, si la composante est réduite à un sommet). On combine alors ces différents cycles eulériens avec le cycle \mathcal{C} , pour former un cycle eulérien sur \mathcal{G} de la façon suivante : on parcourt \mathcal{C} depuis un sommet initial arbitraire ; et, à chaque fois que l'on rencontre une des composantes connexes de \mathcal{G}' pour la première fois, on insère le cycle eulérien considéré sur cette composante. S'agissant d'un cycle, on est assuré de pouvoir poursuivre le parcours de \mathcal{C} après ce détour. Il est facile de vérifier qu'on a ainsi bien construit un cycle eulérien sur \mathcal{G} . ◀

La preuve ci-dessus conduit immédiatement au résultat suivant :

Corollaire 11

Tout graphe eulérien se décompose en cycles (c.à.d., on peut répartir les arêtes en cycles deux à deux disjoints).

Exercice : Résoudre le problème des ponts de Königsberg.

Solution :

► On construit le graphe dont les sommets sont les régions et les arêtes les ponts (voir fig.13).

La question est de savoir s'il existe un circuit eulérien. Or, on constate facilement que les sommets ne sont pas tous de degré pair, ce qui assure qu'un tel circuit n'existe pas. ◀

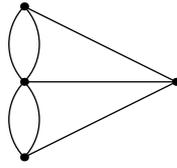


FIG. 13 – Le graphe des ponts de Königsberg

Corollaire 12

Un graphe connexe possède un chemin eulérien si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2.

De plus, si le graphe possède exactement deux sommets de degré impair alors tout chemin eulérien commence en un de ces sommets et se termine à l'autre.

Preuve :

► - Si tous les sommets de \mathcal{G} sont de degré pair, on vient de voir que \mathcal{G} admettait un cycle eulérien, ce qui est plus fort que la conclusion désirée ici.

Si les sommets A et B sont les deux seuls sommets de \mathcal{G} qui soient de degré impair. On construit alors un sur-graphe \mathcal{H} de \mathcal{G} en introduisant un nouveau sommet Ω que l'on relie uniquement à A et B . Le graphe \mathcal{H} est clairement connexe et tous ses sommets sont de degré pair. Il est donc eulérien, et on peut donc considérer un cycle eulérien sur \mathcal{H} . On en déduit un chemin eulérien sur \mathcal{G} en éliminant les arêtes (A, Ω) et (B, Ω) , qui sont nécessairement consécutives dans le cycle eulérien puisque ce sont les seules qui aient Ω comme extrémité.

- Réciproquement, si \mathcal{G} possède un chemin eulérien alors :

Soit il s'agit d'un cycle et le théorème ci-dessus assure que tous les sommets sont de degré pair. Soit, c'est un chemin ouvert, et le raisonnement suivi dans la preuve du théorème s'adapte en tout point, et montre que tous les sommets du graphe sont de degré pair sauf le sommet de départ et le sommet final qui sont eux de degré impair. ◀

4.2 Chemins hamiltoniens

Un chemin est dit *hamiltonien* lorsqu'il passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe.

Un cycle est dit *hamiltonien* lorsqu'il passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe excepté pour le sommet « initial » qui lui est utilisé deux fois.

Un graphe sera dit *hamiltonien* s'il possède un cycle hamiltonien.

Exemples : Les deux premiers graphes (fig.14) sont hamiltoniens, mais pas le troisième (fig.15).

On ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante exploitable dans la pratique pour décider si un graphe est hamiltonien ou non, et cette question est réputée pour être très « complexe ».

Nous verrons toutefois dans les exercices des exemples de conditions suffisantes simples qui permettent d'affirmer qu'un graphe est hamiltonien.

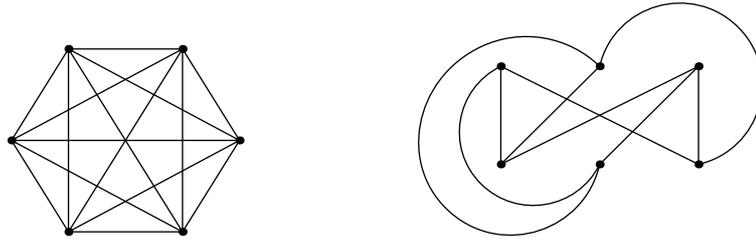


FIG. 14 – \mathcal{K}_n et $\mathcal{K}_{n,n}$ sont toujours hamiltoniens

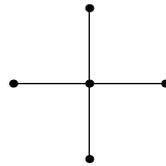


FIG. 15 – Un graphe non hamiltonien

4.3 Exercices

Exercice 28.

Prouver que sur un « échiquier » de dimensions $4 \times n$ (où $n \geq 1$), il n'existe pas de parcours fermé d'un cavalier qui passe par chaque case une fois et une seule (sauf la première puisqu'on veut y revenir).

Exercice 29 (Tournoi des villes 1985).

Vingt équipes de football participent à un tournoi. Le premier jour, chacune dispute un match. Le second jour, chaque équipe joue un autre match, contre une équipe différente de celle de la veille. Prouver qu'après ce second jour, il est possible de trouver un groupe de 10 équipes dont deux quelconques ne se sont pas encore rencontrées.

Exercice 30.

Dans un pays, se trouvent n ($n \geq 2$) villes, deux quelconques distinctes étant reliées par une route directe.

Un *parcours* qui va de la ville A à la ville B (non nécessairement distinctes) consiste à partir de A pour arriver en B en utilisant les routes et en transitant éventuellement par certaines villes, mais sans jamais utiliser deux fois la même route (y compris dans des sens opposés). La *longueur du parcours* est alors le nombre de routes utilisées.

Prouver qu'un organisateur de courses cyclistes peut utiliser toutes les routes pour construire $n - 1$ parcours qui sont de longueurs respectives $1, 2, \dots, n - 1$ et qui n'ont deux à deux aucune route en commun.

Exercice 31 (St Petersburg).

Le roi Arthur fait s'asseoir ses $2n$ chevaliers autour de la Table Ronde. Chacun des chevaliers possède au plus $n - 1$ ennemis parmi les autres chevaliers. Prouver que Merlin l'Enchanteur peut trouver un arrangement des $2n$ chevaliers de sorte qu'aucun ne soit assis à côté d'un de ses ennemis (bien sûr, l'animosité est réciproque, et seuls les chevaliers s'assoient autour de la table).

Exercice 32 (URSS 1990).

Soit $k \geq 1$ un entier fixé. À chaque côté et chaque diagonale d'un n -gone convexe, on attribue une couleur choisie parmi k possibles de sorte qu'aucune ligne brisée fermée dont les sommets sont des sommets du n -gone ne soit coloriée d'une seule couleur. Quel est la plus grande valeur de n pour laquelle cela soit possible ?

Exercice 33 (Chine 1990).

Il existe plusieurs façons de partitionner un n -gone convexe en $n - 2$ triangles à l'aide de $n - 3$ de ses diagonales, deux quelconques sans point commun (à part, éventuellement, les sommets du polygone).

Prouver qu'il existe une de ces partitions pour laquelle on puisse construire une ligne polygonale continue fermée en utilisant une et une seule fois chacun des côtés et chacune des diagonales qui forment la partition, si et seulement si n est un multiple de 3.

5 Solutions

Exercice 1.

a) Quitte à se restreindre à une de ses composantes connexes, on peut supposer que le graphe est connexe. Soit a le nombre de ses arêtes. Alors $2a = \sum_{A \in \mathcal{S}} d(A) \geq 2n$, et donc $a > n - 1$. D'après la propriété 2, c'est donc un graphe connexe qui n'est pas un arbre. Par conséquent, il possède au moins un cycle.

b) Si chaque graphe induit par chaque composante connexe possédait plus de sommets que d'arêtes, alors en additionnant le nombre d'arêtes de chaque composante connexe, on obtiendrait $a < n$ (deux composantes connexes sont deux à deux disjointes donc, en sommant, on ne compte jamais un sommet plusieurs fois, ni une arête).

Par suite, il existe une composante connexe qui induit un graphe connexe possédant au moins autant d'arêtes que de sommets. Comme ci-dessus, on en déduit que ce graphe induit possède un cycle, et donc le graphe initial le possède également.

Exercice 2.

Considérons le graphe simple et non orienté \mathcal{G} dont les sommets sont les personnes, deux étant reliées par une arête si et seulement si elles sont amies. Par hypothèse, tout sommet est de degré au moins 1 (a), et il n'existe pas de graphe induit possédant exactement 2 arêtes (b). L'objectif est de prouver que \mathcal{G} est complet.

Les cas $n = 2$ (d'après (a)) et $n = 3$ (d'après (b)) sont immédiats. On suppose donc que $n \geq 4$.

Par l'absurde : Supposons qu'il existe deux sommets, disons A et B , qui ne soient pas reliés.

Puisque $d(A) \geq 1$, il existe un sommet C adjacent à A .

Si C est adjacent à B alors, d'après (b), A et B sont adjacents (sinon, en ne considérant que les sommets A, B, C on aurait un graphe induit possédant exactement deux arêtes). Contradiction.

Donc C et B ne sont pas adjacents.

De même, il existe alors un sommet D adjacent à B , mais pas à A ni à C . Mais alors, en ne considérant que les sommets A, B, C, D on obtient un graphe induit qui contredit (b).

Finalement, A et B sont adjacents, et la conclusion en découle.

Exercice 3.

Considérons le graphe \mathcal{G} dont les sommets sont les villes et les liaisons aériennes les arêtes. Soit \mathcal{G}' le graphe induit obtenu par suppression de la capitale C et des arêtes qui la concernent. Par hypothèse, \mathcal{G} est connexe. Par contre, \mathcal{G}' ne l'est pas forcément. Quoiqu'il en soit, chaque composante connexe de \mathcal{G}' contient au moins un sommet adjacent à C dans \mathcal{G} . Dans \mathcal{G}' , chacun de ces sommets est de degré 9 (ce qui assure, entre autre qu'une composante connexe contient au moins 10 sommets), et tous les autres sont de degrés 10. Mais, chaque composante, vue comme un graphe connexe (non réduit à un sommet), possède un nombre pair de sommets de degrés impairs, ce qui assure qu'au moins deux sommets sont de degrés impairs dans chaque composante. Comme C est de degré 100 dans \mathcal{G} , le nombre de composantes connexes de \mathcal{G}' ne dépasse donc pas 50. On peut alors rétablir la connexité en restaurant C et une arête pour chaque composante connexe. Cela revient à conserver la connexité initiale de \mathcal{G} tout en éliminant au moins 50 arêtes.

Exercice 4.

Considérons le graphe simple \mathcal{G} dont les sommets sont les personnes, deux étant reliées si et seulement si elle se connaissent. On appellera *lien* tout chemin de longueur 2. Le but du problème est de prouver qu'il existe deux sommets reliés par un nombre pair de liens.

Par l'absurde : Supposons que deux sommets quelconques soient toujours reliés par un nombre impair de liens.

Soit M un sommet arbitraire. On répartit alors les autres sommets en deux groupes : le groupe \mathcal{A} ceux qui sont adjacents à M , et le groupe \mathcal{B} de ceux qui ne le sont pas.

Alors, chaque sommet $A \in \mathcal{A}$ n'a de lien avec M que via un autre sommet de \mathcal{A} . Il en découle que dans le graphe induit par \mathcal{A} , ce sommet A est de degré impair. Ceci étant vrai pour chaque $A \in \mathcal{A}$, il faut donc que \mathcal{A} contienne un nombre pair de sommets (voir I), et donc $d(M)$ est pair.

Comme M a été choisi arbitrairement, on en déduit que chaque sommet de \mathcal{G} est de degré pair.

Reconsidérons le sommet M . D'après ce qui précède, chaque sommet $A \in \mathcal{A}$ est de degré pair, est adjacent à M , et il y a un nombre impair de sommets qui lui sont adjacents dans \mathcal{A} . Il doit donc avoir un nombre pair de sommets qui lui sont adjacents dans \mathcal{B} . Par suite, le nombre total d'arêtes qui relie un sommet de \mathcal{A} et un sommet de \mathcal{B} est pair.

Enfin, tout sommet de \mathcal{B} n'a de liens avec M que via un sommet de \mathcal{A} . Donc, il doit être adjacent à un nombre impairs de sommets de \mathcal{A} . Par suite, \mathcal{B} doit lui aussi contenir un nombre pair de sommets.

Mais alors $card(\mathcal{A}) + card(\mathcal{B}) + 1$ est impair, et ne peut donc être égal à 50. Contradiction.

Exercice 5.

Par l'absurde : Supposons qu'après l'élimination d'une colonne quelconque on obtienne toujours au moins deux lignes identiques.

Alors, pour chaque colonne c , on peut choisir deux lignes qui deviennent identiques lorsque l'on supprime c . On fixe un tel choix pour chacune des colonnes.

Considérons le graphe \mathcal{G} dont les sommets sont les lignes deux étant reliées si elles correspondent à l'un des choix ci-dessus. Alors, notre hypothèse nous assure que chaque colonne détermine exactement une arête.

Ce graphe est évidemment sans boucle, mais aussi sans arête multiple : En effet, supposons que deux lignes, disons l_1 et l_2 , soient reliées par des arêtes associées d'une part à la colonne c et d'autre part à la colonne c' . Cela signifie que d'une part l_1 et l_2 sont identiques, sauf éventuellement aux cases appartenant à c . Et d'autre part, qu'elles sont

identiques, sauf éventuellement aux cases appartenant à c' . Comme c et c' sont supposées distinctes, c'est donc que les deux lignes sont identiques, en contradiction avec l'énoncé.

Ainsi, chaque arête correspond à la donnée d'une colonne, et deux colonnes différentes donnent des arêtes différentes. On identifiera alors arêtes et colonnes.

Donc, \mathcal{G} est simple, possède n sommets et n arêtes. On sait (cf.ex.I-1,b)) qu'alors \mathcal{G} possède un cycle $l_1 l_2 \dots l_k l_1$ (la numérotation n'a aucun rapport avec l'ordre des lignes dans le tableau). Quitte à réduire ce cycle, on peut supposer que les lignes utilisées sont deux à deux distinctes. On note c_i la colonne associée à l'arête (l_i, l_{i+1}) avec $l_{k+1} = l_1$. Ainsi, les colonnes c_1, \dots, c_k sont deux à deux distinctes.

Par construction, les nombres inscrits sur les lignes l_1 et l_2 sont égaux sauf ceux qui sont sur c_1 . En particulier, ceux inscrits sur c_k sont égaux. De même, puisque $c_2 \neq c_k$, les nombres inscrits sur les lignes l_2 et l_3 et sur c_k sont égaux. Et ainsi de suite, on prouve de proche en proche que tous les nombres inscrits dans la colonne c_k et sur les lignes $l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, l_k$ sont égaux. Mais alors l_1 et l_k , étant reliées via c_k sont identiques partout sauf sur c_k , et d'après ce qui précède elles le sont également sur c_k . Elles sont donc totalement identiques, en contradiction avec l'énoncé.

La conclusion en découle.

Exercice 6.

On construit un graphe bipartite dont les deux ensembles de sommets indépendants sont X et Y , où X est un ensemble de 10 sommets représentant les 10 nombres, et Y est un ensemble de 20 sommets représentant les 10 lignes et les 10 colonnes. Et une arête joint le sommet $x \in X$ au sommet $y \in Y$ si et seulement si le nombre x est écrit dans la ligne ou colonne y . Il s'agit alors de prouver qu'un sommet $y \in Y$ est de degré au moins égal à 4. Pour cela, il suffit de prouver qu'il y a au moins 61 arêtes dans ce graphe, le principe des tiroirs permettant alors de conclure.

La clé de l'exercice est alors de remarquer que chaque $x \in X$ est de degré au moins égal à 7 : En effet, pour $x \in X$, on note respectivement $l(x)$ et $c(x)$ le nombre de lignes et de colonnes qui sont reliées à x . Alors, le tableau formé par l'intersection des $l(x)$ lignes et $c(x)$ colonnes concernées est un tableau de taille $l(x)c(x)$ qui contient les 10 apparitions de x . D'où $l(x)c(x) \geq 10$, avec $l(x), c(x) \geq 1$ et entiers. Il est alors facile de vérifier que $l(x) + c(x) \geq 7$, ce qui correspond à $d(x) \geq 7$, comme annoncé.

Nous laissons au lecteur le plaisir de trouver une disposition dans laquelle aucune ligne ni colonne ne contient plus de quatre nombres différents, ce qui montre que le résultat ci-dessus est optimal.

Exercice 7.

Soit l la longueur d'une barre.

Si $m \geq n$, on construit facilement un partage équitable en plaçant les barres chocolatées bout à bout, puis en coupant tous les $\frac{ml}{n}$. Et, comme $\frac{ml}{n} \geq l$, on est sûr de ne pas couper une barre plus d'une fois.

On suppose maintenant que $m < n$.

- Si un partage équitable est possible :

Construisons le graphe simple et non orienté \mathcal{G} dont les sommets sont les n enfants, deux distincts étant reliés par une arête si et seulement s'ils ont chacun un morceau d'une même barre. Puisque $m < n$, on sait que chaque barre est coupée, et comme une barre n'est pas coupée plus d'une fois, on a donc m arêtes.

Notons C_1, \dots, C_k les composantes connexes de \mathcal{G} (avec $k \geq 1$), et pour $i = 1, \dots, k$, on note respectivement n_i et m_i le nombre d'enfants et le nombre d'arêtes dans le graphe induit par C_i .

Puisque les composantes connexes sont deux à deux disjointes, on a : $m = \sum_{i=1}^k m_i$ et $n = \sum_{i=1}^k n_i$, avec $m_i \geq 1$ et $n_i \geq 2$ pour tout i .

De plus, pour la même raison, la part de chacun est alors obtenue lors de la division des barres effectuée selon la composante connexe à laquelle il appartient.

Pour chaque i fixé, les n_i enfants qui composent C_i se partagent donc exactement m_i barres de façon équitable, cette part étant la même d'une composante à l'autre. D'où, pour tout i , on a : $\frac{m_i l}{n_i} = \frac{m l}{n}$, ou encore $\frac{m_i}{n_i} = \frac{m}{n}$. (1)

De $\frac{m}{n} < 1$, on déduit que $m_i < n_i$.

Le graphe induit par chaque composante connexe est donc un graphe connexe qui possède plus de sommets que d'arêtes. On sait que cela implique alors que $m_i = n_i - 1$ pour chaque i .

En sommant, il vient : $m = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n - k$. (2)

On en déduit que $d = \text{pgcd}(m, n)$ divise k .

Mais, pour tout i , la relation (1) s'écrit maintenant : $\frac{n_i - 1}{n_i} = \frac{n - k}{n}$, et donc $kn_i = n$.

Cela assure que k divise n . De (2), on déduit que k divise également m , et donc que k divise d .

Finalement, on a $k = d$ et $m = n - d$.

Réciproquement : Si $m = n - d$ avec $d = \text{pgcd}(m, n)$.

Pour simplifier les notations, on suppose que $l = 1$, et donc la part de chaque enfant doit être $\frac{m}{n}$.

- Si $d = 1$: on reprend le principe du partage vu au départ, en formant les parts de gauche à droite. Si une barre est coupée, le morceau de gauche est soit une part, mais alors il ne reste plus qu'un morceau de longueur $\frac{1}{n}$ qui ne sera pas recoupé, soit complète la part précédente, et est alors de longueur $\frac{p}{n}$ pour un certain entier $p \geq 1$ et le morceau de droite n'est donc pas recoupé. Cela assure qu'il s'agit bien d'un partage équitable du type souhaité.

- Si $d > 1$: on pose $n = dn'$ et $m = dm'$, et donc $m' = n' - 1$. On répartit alors les enfants en d groupes de n' et les barres en paquets de m' . Dans chacun des groupes, on partage alors ces barres comme au cas précédent et le tour est joué.

Exercice 8.

a) Oui, voir fig.16.

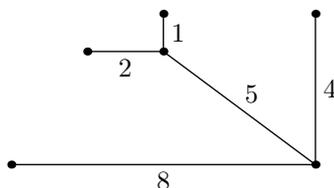


FIG. 16 – Une configuration avec 6 villes

b) Non.

Soit n un entier pour lequel une telle construction est possible. On considère le graphe simple et non orienté \mathcal{G} dont les sommets sont les n villes et les arêtes les $n - 1$ routes. D'après l'énoncé, \mathcal{G} est connexe. Puisqu'il possède exactement $n - 1$ arêtes, c'est un arbre

et il ne possède donc pas de cycle. L'allusion de l'énoncé à la notion de plus petite distance est donc superflue.

Soit A un sommet arbitraire. On note x le nombre de villes dont la distance à A est paire (y compris A elle-même). De telles villes seront dites *bonnes*. On note y le nombre de villes dont la distance à A est impaire.

Evidemment, on a $x + y = n$. (1)

Puisqu'il n'y a qu'un seul chemin entre deux villes données, il y a exactement xy paires $\{B, C\}$ de villes dont exactement une est bonne. Pour une telle paire, la distance de B à C est alors impaire.

Réciproquement, si la distance entre les villes B et C est impaire, c'est qu'une et une seule de ces deux villes est bonne. Ainsi, puisque les distances sont exactement $1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$, c'est que parmi ces nombres exactement xy sont impairs. Or :

- Si $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$, alors $\frac{n(n-1)}{2}$ est pair, et donc $xy = \frac{n(n-1)}{4}$.

De (1), on déduit alors que $n = n^2 - 4xy = (x - y)^2$.

- Si $n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3$, alors $\frac{n(n-1)}{2}$ est impair, et donc $xy = \frac{1}{2}(\frac{n(n-1)}{2} + 1)$.

De (1), on déduit cette fois que $n - 2 = (x - y)^2$.

Ainsi, dans tous les cas, si n est une valeur convenable alors n ou $n - 2$ est un carré.

Comme ce n'est pas le cas de $n = 1986$, une telle construction est impossible pour cette valeur.

Exercice 9.

Considérons le graphe \mathcal{G} dont les sommets sont les centres des cases. On construit tout d'abord une arête entre deux cases si les cases correspondantes contiennent chacune un jeton et partagent un côté. Puis, on relie chaque case qui ne contient pas de jeton à une case arbitraire qui en contient un et qui partage un côté avec elle (cf. règle (a)). L'énoncé assure alors que ce graphe est connexe.

Soit alors T un arbre recouvrant \mathcal{G} . Cet arbre possède n^2 sommets (et donc $a = n^2 - 1$ arêtes), chacun de degré ne dépassant pas 4 (il n'y a que 4 côté par case...). Ceux qui correspondent à des cases ne contenant pas de jetons ayant pour degré 1. Notons qu'en ajoutant les arêtes nécessaires pour retrouver \mathcal{G} , on ne fait qu'augmenter le degré des cases portant un jeton.

Il suffit donc de prouver que tout arbre T de s sommets (et donc $s - 1$ arêtes) chacun de degré ne dépassant pas 4, possède au moins $\frac{s-2}{3}$ sommets de degrés supérieurs à 1. (*)

L'affirmation (*) est trivialement satisfaite si $s \leq 5$.

Par l'absurde : Supposons que l'affirmation (*) soit fautive.

Alors, parmi tous les arbres qui satisfont les prémisses de (*) mais pas sa conclusion, on peut en choisir un, qui possède le plus petit nombre de sommets. Notons-le encore T , et disons qu'il possède s sommets dont m de degrés supérieurs à 1, et donc avec $3m + 2 < s$ et $s > 5$.

Soit A un sommet de T de degré supérieur à 1 (un tel sommet existe sans quoi, il ne pourrait y avoir que deux sommets). On détermine alors un sommet B dont la distance l à A (c.à.d. la longueur du chemin entre A et B) soit maximale. Puisque $d(A) \leq 4$ et que $s > 5$, on a $l > 1$. De plus, $d(B) = 1$ sans quoi on pourrait trouver un sommet adjacent à B serait à une distance de A supérieure à l , ce qui contredirait la maximalité de l .

Soit C le sommet adjacent à B . Notons que puisque $l > 1$, on a $C \neq A$ et que $d(C) > 1$.

Alors, tous les sommets adjacents à C sauf un (celui qui permet de relier A et B , notons-le D , qui lui est peut-être confondu avec A) sont à une distance l de A (toujours pour cause de maximalité de l) et de degrés 1 (même raison que pour B).

Soit alors T' le graphe induit obtenu en éliminant tous les sommets adjacents à C , sauf D . Il est clair que T' est encore un arbre. Soit t le nombre de sommets éliminés. Alors $1 \leq t \leq 3$ et A n'a pas été éliminé.

Par suite, T' possède de $s - t$ sommets, avec $s - 3 \leq s - t < s$; chacun de degré ne dépassant pas 4, et dont $m - 1$ sont de degrés supérieurs à 1 (le sommet C est de degré 1 dans T'). Comme $3(m - 1) + 2 < s - 3 \leq s - t$, on a construit un arbre qui contredit la minimalité de T .

Exercice 10.

Le raisonnement utilisé dans la solution du problème des trois maisons et trois usines est encore valable pour prouver que s'il n'y a pas de triangle alors $a \geq 2f$. En reportant dans la formule d'Euler, on obtient : $a + 2 = s + f \leq s + \frac{1}{2}a$, c.à.d. $a \leq 2s - 4$.

Exercice 11.

Par l'absurde : Supposons qu'il n'existe pas une autoroute passe au-dessus d'une autre, ni une voie de chemin de fer qui passe au-dessus d'une autre.

Il y a 11 villes reliées deux à deux, d'où 55 liaisons de deux natures (train ou route). D'après le principe des tiroirs, il existe donc au moins 28 liaisons d'une même nature. Par symétrie des rôles, on peut supposer qu'il y a au moins 28 autoroutes.

Considérons alors le graphe simple \mathcal{G} dont les sommets sont les villes et les arêtes sont les routes. De notre hypothèse on déduit que \mathcal{G} est planaire. On a vu qu'il alors devait vérifier la relation $a \leq 3s - 6$.

Or, ici $3s - 6 = 27 < 28 \leq a$. Contradiction.

Exercice 12.

Considérons juste le graphe induit par l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. C'est une subdivision de $\mathcal{K}_{3,3}$, il n'est donc pas planaire. On en déduit que, pour $n \geq 9$, le graphe \mathcal{G}_n n'est pas planaire.

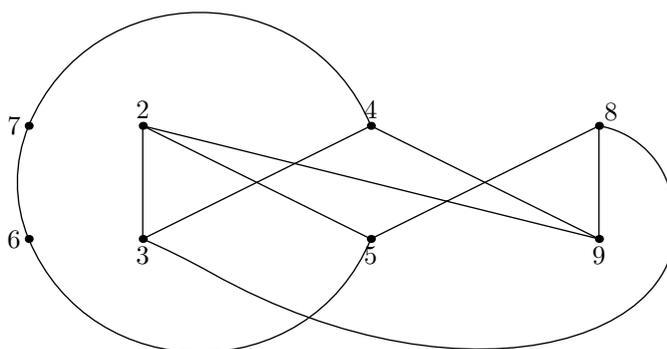


FIG. 17 – Un sous-graphe de \mathcal{G}_9 est une subdivision de $\mathcal{K}_{3,3}$

Par contre, la représentation de la figure 17 montre que \mathcal{G}_8 est planaire, et ainsi qu'il en est de même pour tout $n \leq 8$.

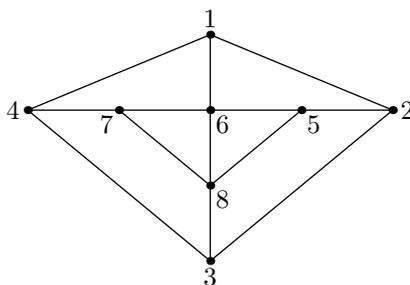


FIG. 18 – \mathcal{G}_8 est planaire

Exercice 13.

a) et b) Quitte à raisonner sur une composante connexe, il suffit de prouver le résultat pour \mathcal{G} connexe.

On note M_1, \dots, M_n les sommets. Soit a le nombre d'arêtes de \mathcal{G} .

Par l'absurde : Supposons que, pour tout i , on ait $d(M_i) \geq 6$.

Alors $2a = \sum_{i=1}^n d(M_i) \geq 6n$, et donc $3n \leq a$.

Or, puisque \mathcal{G} est planaire, on sait que $a \leq 3n - 6$. Cela conduit à $a \leq a - 6$, ce qui est clairement absurde.

La conclusion en découle.

Exercice 14.

Considérons le graphe \mathcal{G} dont les sommets sont les n points, deux reliés par une arête si et seulement s'ils sont à une distance d l'un de l'autre. On va prouver que \mathcal{G} est planaire. Plus précisément, on va prouver que la représentation de \mathcal{G} pour laquelle l'arête $\{P_i, P_j\}$ est le segment $[P_i, P_j]$, est planaire.

Par l'absurde : Supposons, par exemple, que les segments ouverts $]P_1, P_2[$ et $]P_3, P_4[$ aient le point O en commun. Notons que les deux segments ne peuvent se rencontrer qu'en O sans quoi l'une des distances P_2P_3 ou P_2P_4 serait strictement inférieure à d . L'inégalité triangulaire permet alors d'affirmer que : $OP_1 + OP_3 > P_1P_3$ et $OP_2 + OP_4 > P_2P_4$

d'où $2d = P_1P_2 + P_3P_4 = OP_1 + OP_2 + OP_3 + OP_4 > P_1P_3 + P_2P_4$

Et donc, l'une des distances P_1P_3, P_2P_4 est strictement inférieure à d , ce qui contredit la minimalité de d .

Et ainsi, la représentation ci-dessus de \mathcal{G} est bien planaire. D'après la propriété 5, et puisque \mathcal{G} possède n sommets, le nombre d'arêtes ne dépasse pas $3n - 6$, ce qui est la conclusion désirée.

Exercice 15.

Soit E un ensemble de $n \geq 3$ points du plan en position générale.

On note \mathcal{C} son enveloppe convexe, et c le nombre de sommets de \mathcal{C} .

On va prouver que $f(E) = 3n - c - 3$.

Supposons ce résultat établi.

Alors, puisque $3 \leq c \leq n$, on en déduit que $2n - 3 \leq f(E) \leq 3n - 6$.

En particulier, si $n = 1003$ il vient $2003 \leq f(E) \leq 3003$.

On dira que le disque fermé Γ est *bon* s'il contient trois points de E sur son bord et aucun à l'intérieur.

Il est clair que si A, B sont deux points de E appartenant à un bon disque Γ , alors il suffit de rétrécir légèrement Γ dans une direction convenablement choisie pour déterminer un disque fermé qui ne contienne que A, B comme points de E , et donc que $\{A, B\}$ est bonne.

Ainsi, tout bon disque contient exactement trois points de E (il n'y a pas quatre points cocycliques) qui forment trois bonnes paires. Dans ces conditions, on dira qu'ils forment un *bon triangle*.

Réciproquement, si $\{A, B\}$ est bonne :

La droite (AB) partage le plan en deux demi-plans ouverts, et E en deux sous-ensembles disjoints (aucun autre point de E n'est sur (AB)), notés E_1 et E_2 .

On pose $E_1 = \{M_1, \dots, M_k\}$ et $E_2 = \{P_1, \dots, P_q\}$, avec $k \geq 1$ et éventuellement E_2 vide.

- Si E_2 est non vide :

On pose alors $\alpha_i = \widehat{AM_iB}$ et $\beta_i = \widehat{AP_iB}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\alpha_1 = \max \alpha_i$ et $\beta_1 = \max \beta_i$.

On note Γ_i (resp. Γ'_i) le disque fermé circonscrit à AM_iB (resp. AP_iB).

Alors seul Γ_1 (resp. Γ'_1) ne contient pas d'autre point de E_1 (resp. E_2) que M_1 (resp. P_1).

Et Γ_1 ne contient pas non plus de point de E_2 si et seulement si $\pi - \alpha_1 > \beta_1$, c.à.d. $\alpha_1 + \beta_1 < \pi$.

On a la même conclusion sur Γ'_1 .

Donc, A et B appartiennent exactement à deux bons disques.

- Si E_2 est vide :

Notons que cela signifie que A et B sont deux sommets consécutifs de \mathcal{C} .

Le raisonnement précédent reste valable pour prouver que A et B appartiennent à exactement un bon disque.

Considérons maintenant le graphe \mathcal{G} dont les sommets sont les points de E et les arêtes sont exactement les segments dont les extrémités forment une bonne paire.

Propriété.

a) Le graphe \mathcal{G} est simple (évident) et planaire.

b) Le graphe \mathcal{G} est connexe et toutes ses faces sont des triangles exceptée la face extérieure à \mathcal{C} .

Preuve.

a) Supposons que l'arête $[AB]$ soit coupée intérieurement par une autre arête/segment :

Parmi tous les points de $]AB[$ qui appartiennent à une autre arête, on note M celui dont la distance à B est minimale.

Il existe donc une arête segment $[XY]$ qui rencontre $[AB]$ en M , et $M \notin \{X, Y\}$ (pas trois points de E alignés).

Comme A et B sont de part et d'autre de $[XY]$, le segment $[XY]$ ne peut faire partie du bord de \mathcal{C} . D'après ci-dessus, il existe donc un point $Z \in E$ tel que XYZ soit un bon triangle, et qui soit du même côté de (XY) que B . Ce bon triangle XYZ ne peut donc contenir intérieurement d'autre point de E que X, Y, Z . Par suite, la droite (AB) qui entre dans le triangle XYZ en M doit en ressortir en traversant un des côtés $]XZ[$ ou $]YZ[$, par exemple $]YZ[$ en M' .

Mais alors $M'B < MB$, ce qui contredit la minimalité de M .

b) D'après ci-dessus, à part les segments qui forment le bord de \mathcal{C} , toutes les autres arêtes relient les membres d'une bonne paire qui appartient à exactement deux bons triangles, situés de part et d'autre de l'arête considérée. On en déduit que toutes les faces (hormis la face extérieure) de \mathcal{G} sont des triangles :

En effet, si une face f était un k -gone, avec $k \geq 3$.

D'après a), le polygone f est simple, et deux sommets consécutifs A et B de f ne seraient reliés que vers l'extérieur de f , ce qui contredit la propriété ci-dessus.

On a donc affaire à une triangulation de \mathcal{C} à l'aide de bons triangles. Tout point Ω de E étant contenu dans \mathcal{C} , il doit appartenir (au sens large) à un de ces triangles. Ce ne peut être intérieurement, puisqu'il s'agit de bons triangles, ni sur le bord en dehors des sommets puisque E ne contient pas trois points alignés. C'est donc que Ω est un sommet d'un bon triangle. Cela assure la connexité de \mathcal{G} , et achève la preuve de la propriété.

Puisque \mathcal{G} est simple planaire et connexe, on peut donc utiliser la formule d'Euler : $S + F - A = 2$.

On a directement : $S = n$.

Soit T le nombre de triangles. Alors $F = T + 1$.

D'autre part, chaque triangle donne trois arêtes et chaque arête appartient à deux triangles, sauf celles qui forment le bord de \mathcal{C} qui, elles, n'appartiennent qu'à un seul triangle.

Ainsi : $A = f(E) = \frac{3T-c}{2} + c = \frac{3T+c}{2}$. D'où $T = \frac{2f(E)-c}{3}$.

La relation d'Euler s'écrit alors : $n + (\frac{2f(E)-c}{3} + 1) - f(E) = 2$
c.à.d. $f(E) = 3n - c - 3$, comme annoncé.

Exercice 16.

Il est évident qu'une coloration propre de $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$ nécessite au moins deux couleurs.

Il suffit ensuite de constater que si a, b sont de même parité et distincts, alors $a + b$ est pair et plus grand que 2. Donc ils ne sont pas adjacents. Par conséquent, on peut construire une 2-coloration de $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$ en coloriant tous les nombres pairs en bleu et tous les impairs en rouge. Et donc $\chi(\mathcal{G}_{\mathbb{N}}) = 2$.

Exercice 17.

On prouve le résultat sur le nombre n de sommets.

Pour $n = 1$, la conclusion est évidente (comme pour $n \leq 6$ d'ailleurs).

Soit $n \geq 1$ fixé. On suppose que la conclusion est établie pour tout graphe simple planaire n'ayant pas plus de n sommets.

Soit alors un graphe simple planaire \mathcal{G} de $n + 1$ sommets.

On a vu à l'ex. II-4, que tout graphe simple planaire \mathcal{G} possédait un sommet de degré au plus égal à 5. Soit A un tel sommet, et \mathcal{G}' le graphe induit en supprimant A et les arêtes correspondantes. D'après l'hypothèse de récurrence, chaque composante connexe de \mathcal{G}' est 6-colorable (bien sûr, on utilise les mêmes couleurs pour chaque composante). Comme A n'est pas adjacent à plus de 5 sommets, quelles que soient les colorations choisies sur chaque composante, il restera toujours au moins une couleur disponible pour être attribuée à A , et construire ainsi une 6-coloration de \mathcal{G} .

Exercice 18.

On prouve le résultat par récurrence sur le nombre de sommets n .

Remarquons tout d'abord que si $k \geq n + 1$, alors $\frac{k-2}{k-1} \times \frac{n^2}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2}$ qui est le nombre maximum d'arêtes que peut posséder un graphe simple non orienté de n sommets. Il suffit donc de prouver le résultat pour $k \leq n$.

Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire.

Soit $n \geq 2$ fixé. Supposons la conclusion établie pour tout graphe d'au plus $n - 1$ sommets.

Parmi tous les graphes de n sommets, sans k -clique, on considère un graphe \mathcal{G} ayant un maximum d'arêtes.

Supposons que \mathcal{G} ne contienne pas de $(k - 1)$ -clique :

Alors, il existe deux sommets, disons A_1 et A_2 , non reliés par une arête (puisque $k - 1 < n$). En ajoutant cette arête on construit ainsi un graphe \mathcal{G}' de n sommets, et ayant plus d'arêtes que \mathcal{G} . D'après la maximalité de \mathcal{G} , c'est donc que \mathcal{G}' contient une k -clique et que celle-ci utilise les sommets A_1 et A_2 (sinon, elle serait aussi dans \mathcal{G}). Appelons A_3, \dots, A_k les autres sommets de cette k -clique. Alors, avec A_2 , ils forment une $(k - 1)$ -clique dans \mathcal{G} , ce qui contredit notre hypothèse.

Donc, \mathcal{G} contient une $(k - 1)$ -clique. Soit E l'ensemble de sommets d'une telle $(k - 1)$ -clique, et $F = \mathcal{S} \setminus E$ l'ensemble des sommets qui ne sont pas dans E .

Alors, les sommets de E définissent exactement $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ arêtes. D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence utilisée sur le graphe induit dont les sommets sont ceux qui sont dans F (et qui donc ne contient pas de k -clique), les sommets de F donc définissent au plus $\frac{k-2}{k-1} \times \frac{(n-k+1)^2}{2}$ arêtes.

Enfin, toujours puisque \mathcal{G} ne contient pas de k -clique, chaque sommet de F ne peut être adjacent à plus de $k - 2$ sommets de E . Par suite, le nombre d'arêtes qui relient un sommet de E et un sommet de F ne dépasse pas $(k - 2)(n - k + 1)$.

Le nombre d'arêtes de \mathcal{G} ne dépasse donc pas

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} + \frac{k-2}{k-1} \times \frac{(n-k+1)^2}{2} + (k-2)(n-k+1) = \frac{k-2}{k-1} \times \frac{n^2}{2}, \text{ ce qui achève la démonstration.}$$

Remarque.

Ce majorant est atteint lorsque n est un multiple de $k - 1$. En effet, dans ce cas, il suffit de répartir n sommets en $k - 1$ groupes de $p = \frac{n}{k-1}$ sommets, et de considérer le graphe $(k - 1)$ -partite consistant à tracer une arête entre deux sommets si et seulement si ces deux sommets ne font pas partie d'un même groupe. Il est facile de vérifier qu'un tel graphe contient exactement $\frac{k-2}{k-1} \times \frac{n^2}{2}$ arêtes, mais pas de k -clique.

Exercice 19.

Considérons le graphe \mathcal{G} dont les sommets sont les 1998 aéroports, deux reliés par une arête si et seulement s'ils sont reliés par un vol direct. D'après l'énoncé, ce graphe est sans triangle. D'après le théorème de Túrán (et Mantel), \mathcal{G} contient au maximum $\frac{1998^2}{4} = 998001$ arêtes.

Exercice 20.

Soit \mathcal{G} le graphe dont les sommets sont les points, deux étant reliés par une arête si et seulement si la corde qu'ils définissent sous-tend un angle au centre dépassant 120° .

Soient A, B, C trois des points, que l'on suppose disposés dans cet ordre sur le cercle (sens trigonométrique). Comme l'angle autour du centre O du cercle est de $360^\circ = 3 \times 120^\circ$, il est facile de vérifier que ces points ne peuvent être deux à deux reliés par une arête dans le graphe. Cela signifie que \mathcal{G} est sans triangle. Le théorème de Túrán (et Mantel) assure alors que \mathcal{G} ne possède pas plus de $\frac{21^2}{4}$ arêtes. Par suite, le nombre x de cordes qui définissent un angle ne dépassant pas 120° , c.à.d. le nombre de couples non reliés par une arête, est au moins égal à $\frac{21 \times 20}{2} - \frac{21^2}{4} = \frac{399}{4} = 99,75$. Comme x est évidemment un entier, on a donc $x \geq 100$.

Exercice 21.

C'est la même idée que dans l'exercice précédent : Il suffit de remarquer que si deux points sont situés à une distance supérieure à $\sqrt{2}$, alors l'angle au centre qu'ils définissent est supérieur à 90° . On en déduit aisément que le graphe dont les sommets sont les points, deux étant reliés par une arête si et seulement s'ils sont à une distance supérieure à $\sqrt{2}$ l'un de l'autre, ne contient pas de 4-clique. Le théorème de Turán permet alors d'affirmer que ce graphe ne contient pas plus de $\frac{n^2}{3}$ arêtes.

Exercice 22.

On considère le graphe simple \mathcal{G} dont les sommets sont les éléments de S , et pour lequel $\{x, y\}$ est une arête si et seulement si $A + x$ et $A + y$ sont disjoints.

L'objectif du problème est donc de prouver que \mathcal{G} contient une 100-clique. Cela nous invite donc à évaluer le nombre d'arêtes de \mathcal{G} afin de voir si par hasard le théorème de Turán (cf. ex. 18) ne permettrait pas de conclure. Le graphe \mathcal{G} possède 10^6 sommets et a arêtes. La conclusion désirée découle immédiatement de ce théorème si l'on prouve que $a > \frac{98}{99} \times \frac{10^{12}}{2}$.

Or, $\{x, y\}$ est une arête si et seulement si, pour tous $m, n \in A$, avec $m \neq n$, on a $x - y \neq m - n$. Lorsque les nombres distincts m et n décrivent A , le nombre $m - n$ prend au plus 101×100 valeurs différentes. Donc, pour $x \in S$ fixé, il y a au plus 101×100 éléments y de S qui ne sont pas adjacents à x dans le graphe \mathcal{G} , ce qui entraîne que $d(x) \geq 10^6 - 1 - 101 \times 100$. Ceci étant vrai pour tout $x \in S$, si l'on note a le nombre d'arêtes de \mathcal{G} alors :

$$a = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} d(x) \geq \frac{1}{2} \cdot 10^6 \cdot (10^6 - 1 - 101 \times 100)$$

Il reste à vérifier que $\frac{1}{2} \cdot 10^6 \cdot (10^6 - 1 - 101 \times 100) > \frac{98}{99} \cdot \frac{10^{12}}{2}$, c.à.d. que $10^6 > 99 + 99 \times 10100 = 10^6 - 1$, ce qui est clairement vrai.

Exercice 23.

a) On construit le graphe complet à 17 sommets, et on colorie une arête en rouge, en vert ou en bleu selon qu'elle relie deux personnes qui sont amies, ennemies ou indifférentes l'un à l'autre.

Soit A un sommet arbitraire. Il est de degré 16 et donc, d'après le principe des tiroirs, au moins 6 des arêtes d'extrémité A sont d'une même couleur, disons rouge. Si deux de ces 6 sommets reliés à A par une arête rouge sont eux-mêmes reliés par une arête rouge, on a trouvé notre groupe de trois. Dans le cas contraire, on a donc 6 sommets reliés deux à deux par des arêtes coloriées par seulement deux couleurs. On a vu précédemment qu'une telle configuration contenait nécessairement un triangle monochromatique, ce qui permet de conclure.

b) On construit le graphe complet à 18 sommets, et on colorie une arête soit en rouge soit en vert selon qu'elle relie deux personnes qui sont amies ou ennemies. Soit A un sommet arbitraire. Il est de degré 17 et donc, d'après le principe des tiroirs, au moins 9 des arêtes d'extrémité A sont d'une même couleur, disons rouge. Appelons M_1, \dots, M_8, M_9 les sommets concernés.

- Si, parmi les 8 arêtes d'extrémité M_1 (par exemple) et un autre des points M_i , il y en a au moins 6 qui sont vertes : Alors, parmi les 6 sommets correspondant, on sait qu'on peut en trouver trois qui forment un triangle monochromatique. Si ce triangle est rouge, alors le groupe formé de A et des trois sommets est un groupe de 4 personnes du type

cherché. Si ce triangle est vert, cette fois c'est le groupe formé de M_1 et des trois sommets qui est convenable.

Ce raisonnement s'adapte évidemment si l'on remplace M_1 par un autre des M_i .

- Si, pour chaque i , parmi les 8 arêtes qui relie M_i à chacun des autres il y en a exactement 5 qui sont vertes, alors le graphe induit par les 9 sommets M_1, \dots, M_8, M_9 est un graphe à 9 sommets qui sont tous de degré impairs, ce qui est impossible (cf. I).

- Si l'un des 9 points, disons M_1 , est relié à au plus 4 autres des M_i par une arête verte. Alors, il est relié à au moins 4 des 8 points par une arête rouge, disons M_2, M_3, M_4, M_5 . Si l'une des arêtes qui relient deux de ces 4 sommets est rouge, par exemple (M_2, M_3) , alors A, M_1, M_2, M_3 forment un groupe du type cherché. Dans le cas contraire, c'est le groupe M_2, M_3, M_4, M_5 qui permet de conclure.

Exercice 24.

On va prouver le résultat sous une autre forme, en démontrant que \mathcal{G} est bipartite si et seulement s'il ne possède pas de cycle de longueur impaire.

Notons tout d'abord l'équivalence entre les deux résultats : En effet, si \mathcal{G} est bipartite il suffit de colorier chacun des deux groupes de sommets indépendants d'une seule couleur pour obtenir une 2-coloration. Réciproquement, si une 2-coloration existe, les deux groupes formés par les sommets d'une même couleur donnent la bipartition désirée.

- Si \mathcal{G} est bipartite : Puisque tout chemin fait alterner un sommet d'un groupe et un sommet de l'autre, il est clair que l'on ne peut revenir en un même sommet qu'en ayant utilisé un nombre pair d'arêtes intermédiaires. Et donc qu'un cycle ne peut qu'être de longueur paire.

- Si \mathcal{G} ne possède pas de cycle de longueur impaire : On va construire une bipartition de \mathcal{G} . Pour cela, on remarque tout d'abord qu'il suffit de construire une telle bipartition sur chaque composante connexe, puisqu'ensuite nous n'aurons plus qu'à répartir les deux groupes de sommets indépendants sur chaque composante pour former les deux groupes cherchés sur \mathcal{G} lui-même. En fait, il suffit donc de prouver le résultat pour un graphe \mathcal{G} que l'on peut supposer connexe.

Soit alors A un sommet arbitraire. Pour tout sommet X (y compris A), on note $d(X, A)$ la *distance* entre X et A , c.à.d. la longueur minimale d'un chemin reliant X et A (avec $d(A, A) = 0$ par définition). La connexité de \mathcal{G} assure que, pour tout X , le nombre $d(X, A)$ est bien défini.

On note P (resp. I) l'ensemble des sommets dont la distance à A est paire (resp. impaire). Il est clair que P et I forment une partition de l'ensemble des sommets. Supposons qu'il existe deux sommets $X, Y \in P$ qui soient reliés par une arête : Alors, en utilisant un chemin de longueur minimale qui relie A à X , puis l'arête (X, Y) , et enfin un chemin de longueur minimale qui relie Y à A , on crée ainsi un cycle de longueur impaire, ce qui contredit notre hypothèse de départ. Donc, P est un ensemble de sommets indépendants. Un raisonnement analogue montre qu'il en est de même de I , ce qui achève la démonstration.

Exercice 25.

On va prouver un résultat plus général :

« Si l'ensemble des arêtes de \mathcal{K}_m est partitionné en n sous-ensembles A_1, \dots, A_n où $m > 2^n$, alors au moins un des sous-ensembles A_i induit un graphe qui possède un cycle de longueur impaire. »

Ici, le graphe induit par A_i est formé des m sommets mais bien évidemment que des arêtes qui appartiennent à A_i .

Voyons tout d'abord comment on en déduit une solution de l'exercice :

On considère le graphe complet dont les sommets sont les $m = 1983$ villes, et les arêtes représentent les vols directs. Si deux compagnies proposent le même vol, on peut toujours n'en considérer qu'un. Si l'on est capable de conclure dans ce cas, on l'est toujours dans l'autre. Ainsi, il s'agit bien d'un graphe simple (sans arêtes multiples). On répartit alors les arêtes en 10 groupes selon la compagnie qui propose le vol en question. Puisque $1983 > 1024 = 2^{10}$, le théorème ci-dessus assure que l'une des compagnies permet de décrire un cycle de longueur impaire, ce qui est bien ce que nous voulions.

Prouvons maintenant le résultat annoncé, par récurrence sur n :

Pour $n = 1$, le résultat est évident pour tout $m \geq 3$.

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Supposons le résultat établi pour tout $m > 2^n$.

Pour $m > 2^{n+1}$, on se donne maintenant une partition de l'ensemble des arêtes de \mathcal{K}_m en $n + 1$ sous-ensembles A_1, \dots, A_{n+1} .

Si le graphe \mathcal{G}_{n+1} induit par A_{n+1} n'est pas bipartite alors, d'après l'exercice précédent, il admet un cycle de longueur impaire, et la conclusion est assurée. On suppose donc que \mathcal{G}_{n+1} est bipartite, et on se donne une partition de l'ensemble des m sommets en deux sous-ensembles, notés E et F , tels qu'aucune arête de A_{n+1} ne relie deux sommets de E ou deux sommets de F . L'un de ces deux ensembles, disons E , contient plus de 2^n sommets (au moins $\frac{m}{2}$), et chaque arête reliant deux de ces sommets appartient donc à l'un des ensembles A_1, \dots, A_n . L'hypothèse de récurrence assure alors que l'une de ces parties induit un graphe qui possède un cycle de longueur impaire. Ce qui achève la démonstration.

Exercice 26.

La plus petite valeur de n est $n = 8$.

Construisons le graphe \mathcal{G} dont les sommets sont les étudiants, deux étant reliés par une arête si et seulement s'ils ont eu la meilleure note dans une épreuve donnée. Ainsi, chaque épreuve correspond à un triangle unique, auquel on attribue une couleur différente. Puisque pour deux matières quelconques, il n'y a pas deux étudiants qui ont eu les meilleures notes dans ces deux matières à la fois, chaque arête du graphe appartient à un et un seul des triangles associés, et est donc coloriée d'une seule couleur. De plus, puisque deux matières quelconques il y a toujours un et un seul étudiant qui a eu les meilleures notes dans ces deux matières, deux triangles monochromatiques ont toujours un et un seul sommet en commun. Dans ce qui suit, "triangles" est employé pour "triangles monochromatiques".

Il suffit alors de remarquer que si quatre triangles ont un sommet X commun alors tous les triangles ont ce sommet X : En effet, dans le cas contraire, un cinquième triangle devrait posséder un sommet commun différent avec chacun des quatre triangles, ce qui fait quand même un peu trop de sommets pour un triangle...

- Si $n \geq 8$: Alors, un triangle arbitraire T possède un sommet commun avec au moins 7 autres triangles. Le principe des tiroirs assure qu'un des sommets de T est commun à trois autres triangles, et donc que l'on est dans la situation décrite ci-dessus.

Il suffit ensuite de trouver un exemple de situation à 7 matières (et donc, pour $n < 7$ également) pour laquelle il n'y a pas un étudiant qui a été le meilleur dans chacune des matières. Par exemple (une croix indique la meilleure note) :

	A	B	C	D	E	F	G
1	×	×	×				
2	×			×	×		
3		×		×		×	
4			×	×			×
5	×					×	×
6		×			×		×
7			×		×	×	

Exercice 27.

On va prouver le résultat par récurrence sur le nombre n de sommets.

On a clairement $\chi(\mathcal{G}) \leq 5$ pour $n \leq 5$.

Soit $n \geq 5$ fixé. On suppose la conclusion établie pour tout graphe simple et planaire de n sommets.

Soit alors \mathcal{G} , un graphe simple et planaire de $n + 1$ sommets.

D'après l'exercice II-4, \mathcal{G} possède un sommet A de degré ne dépassant pas 5. Soit \mathcal{G}' le graphe induit en supprimant A et les arêtes s'y rapportant. On se donne une représentation planaire de \mathcal{G} , qui induit évidemment une représentation planaire de \mathcal{G}' .

Il est clair que \mathcal{G}' est simple planaire et possède exactement n sommets. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut considérer une 5-coloration de \mathcal{G}' .

- S'il reste une couleur disponible pour A dans cette 5-coloration, sans remettre en question le fait que le coloriage alors obtenu soit propre, on a fini.

- Sinon, on a $d(A) = 5$ et chacun des sommets B_1, \dots, B_5 qui lui sont adjacents est colorié avec la couleur c_1, \dots, c_5 . Sans perte de généralité, on peut supposer que la numérotation a été choisie de sorte à respecter la planarité de \mathcal{G} , c.à.d. que dans notre représentation planaire de \mathcal{G} , les arêtes (A, B_i) se rencontrent dans le sens trigonométrique pour i croissant.

Intéressons-nous aux couleurs c_1 et c_3 : Notons E l'ensemble des sommets X de couleurs c_1 ou c_3 pour lesquels il existe un chemin reliant X et B_1 (y compris B_1) et constitué uniquement de sommets de couleurs c_1 ou c_3 (cela revient à ne considérer que la composante connexe contenant B_1 dans le graphe induit dont les sommets sont les points de couleurs c_1 ou c_3).

Si $B_3 \notin E$, alors on échange les couleurs c_1 et c_3 sur tous les points de E , et sur eux seuls. Comme, vis-à-vis des autres couleurs, c_1 et c_3 jouent des rôles symétriques et qu'aucun autre sommet de couleur c_1 ou c_3 n'est adjacent à un sommet de E , le nouveau coloriage de \mathcal{G}' ainsi obtenu est encore une 5-coloration de \mathcal{G}' . Mais cette fois, B_1 et B_3 sont de couleur c_3 , ce qui a libéré la couleur c_1 et nous permet de l'attribuer à A afin d'obtenir une 5-coloration de \mathcal{G} .

Si $B_3 \in E$, alors il existe un chemin $B_1, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k, B_3$ dont les sommets sont alternativement coloriés par c_1 et c_3 . En ajoutant A , on met en évidence un cycle de \mathcal{G} . Et, puisque \mathcal{G} est planaire, ce cycle délimite une région bornée qui contient l'un des points B_2 ou B_4 , disons B_2 , mais pas l'autre. Notons qu'à cause de sa coloration, B_2 n'appartient pas au cycle en question. Par suite, un hypothétique chemin constitué uniquement de sommets de couleurs c_2 ou c_4 et reliant B_2 et B_4 , a nécessairement une de ses arêtes qui traverse une arête du cycle, en contradiction avec la planarité de \mathcal{G} . Par suite, un tel chemin n'existe pas. Alors, en raisonnant à partir de B_2 et par rapport aux couleurs c_2 et c_4 , on peut échanger les couleurs c_2 et c_4 selon le principe utilisé dans le premier cas pour c_1 et c_3 . Cela libère la couleur c_2 , que l'on peut maintenant attribuer à A , ce qui achève la démonstration.

Exercice 28.

Cela revient à prouver qu'il n'existe pas de cycle hamiltonien sur le graphe dont les sommets sont les cases, deux étant reliées si et seulement s'il est possible à un cavalier de passer directement de l'une à l'autre.

Colorions alternativement en blanc et noir chacune des cases de l'échiquier, comme sur un échiquier classique, ce qui fournit une coloration du graphe, qui est une coloration propre car le mouvement d'un cavalier oblige à passer d'une case blanche à une case noire et réciproquement.

Les $4n$ de l'échiquier se répartissent en quatre lignes de n cases chacune : deux lignes "extérieures" et deux lignes "intérieures". Or, le mouvement du cavalier impose que de toute case située sur une ligne extérieure on passe sur une case située sur une ligne intérieure. Par suite, si un cycle hamiltonien existe, chaque case extérieure est directement suivie d'une case intérieure. Et, comme il y a autant de cases intérieures que de cases extérieures sur l'échiquier, c'est donc que le cycle est formé par une alternance de cases intérieures et extérieures. Mais alors, la 2-coloration du graphe entraîne que les cases extérieures sont toutes de la même couleur (et que les cases intérieures sont toutes de l'autre couleur), ce qui n'est manifestement pas le cas. Donc, un cycle hamiltonien du cavalier est impossible.

Exercice 29.

On construit un graphe \mathcal{G} dont les sommets sont les 20 équipes, en reliant deux sommets par une arête rouge si et seulement s'ils correspondent à deux équipes qui se sont affrontées le premier jour, et par une arête verte pour le second jour. Ainsi, chaque sommet est l'extrémité d'exactly une arête rouge et une arête verte, et donc a pour degré 2. Dans chaque composante connexe, en partant d'un sommet arbitraire, et en suivant alternativement une arête rouge et une arête verte, on parcourt ainsi un cycle eulérien, qui est également un cycle hamiltonien. La bicoloration assure que ce cycle est de longueur paire. En choisissant un sommet sur deux dans chacun de ces cycles, on obtient ainsi 10 sommets indépendants, qui représentent bien 10 équipes dont deux quelconques ne se sont pas encore affrontées.

Exercice 30.

Considérons le graphe non orienté dont les sommets sont les villes et les arêtes les routes. Il s'agit du graphe simple complet K_n . Le but du problème est donc de partitionner l'ensemble des arêtes de K_n en chemins C_1, C_2, \dots, C_{n-1} , où C_i est un chemin eulérien de longueur i .

- Si n est impair : Alors, chaque sommet du graphe est de degré pair. Le théorème d'Euler assure alors de l'existence d'un chemin (et même d'un cycle) eulérien sur K_n . On peut donc ainsi ordonner les $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes de K_n de façon à former un parcours de longueur $\frac{n(n-1)}{2}$. Il suffit alors de "découper" ce parcours en une succession de parcours de longueurs $1, 2, \dots, n-1$, pour obtenir la conclusion désirée dans ce cas.

- Si n est pair : Cette fois, tous les sommets sont de degrés impairs, et le raisonnement ci-dessus ne convient plus.

Notons S_1, S_2, \dots, S_n les sommets.

Pour $0 \leq 4i+1 \leq n-1$, on considère les parcours :

$$P_i : S_{4i+1} - S_{4i+2} - S_1 - S_{4i+1} - S_2 - S_{4i+2} - S_3 - \dots - S_{4i+1} - S_{2i} - S_{4i+2}$$

Et, pour $0 \leq 4i-1 \leq n-1$, on considère les parcours :

$$P'_i : S_{4i-1} - S_1 - S_{4i} - S_2 - S_{4i-1} - S_3 - \dots - S_{4i-1} - S_{2i-1} - S_{4i}$$

On vérifie facilement que, pour tout i , P_i est de longueur $L_i = 4i + 1$, et que P'_i est de longueur $L'_i = 4i - 2$.

De plus, pour i fixé, le parcours P_i (resp. P'_i) n'utilise que des arêtes dont au moins une des extrémités est S_{4i+1} ou S_{4i+2} (resp. S_{4i-1} ou S_{4i}) et ne passe par aucun sommet dont l'indice est supérieur à $2i$ (resp. $2i - 1$). Cela assure que si $i \neq j$ alors les parcours P_i et P_j d'une part, mais aussi P'_i et P'_j , ainsi que P_i et P'_i sont bien disjoints (en terme d'arêtes).

Si $n = 4k$: On ne construit que les parcours $P_0, P'_1, P_2, P'_3, \dots, P_{k-1}$.

Si $n = 4k + 2$: On ne considère que les parcours $P_0, P'_1, P_2, P'_3, \dots, P_{k-1}, P'_k$.

Dans les deux cas, cela fournit des parcours deux à deux disjoints, et de longueurs deux à deux distinctes dans $\{1, 2, \dots, n-1\}$. De plus, à part S_n et S_{n-1} , chaque sommet du graphe apparaît exactement une fois comme extrémité d'un de ces parcours et, éventuellement, comme sommet intermédiaire dans d'autres parcours. Par contre, ni S_n ni S_{n-1} n'apparaît dans un quelconque de ces chemins. Ainsi, le graphe \mathcal{G} obtenu en éliminant toutes les arêtes déjà utilisées dans les parcours ci-dessus est connexe (on peut passer d'un sommet à un autre via S_n) dont les sommets sont maintenant tous de degrés pairs, sauf S_n et S_{n-1} . Le théorème d'Euler permet alors de considérer un chemin eulérien sur \mathcal{G} , que l'on découpe ensuite en parcours de longueurs adéquates (certaines longueurs ont déjà été utilisées par les parcours ci-dessus) pour conclure dans ce cas.

Exercice 31.

Considérons le graphe dont les sommets sont les chevaliers, deux étant reliés par une arête si et seulement s'ils ne sont *pas* ennemis (on dira donc qu'ils sont amis). Il s'agit donc de prouver que ce graphe est hamiltonien. Cela revient à prouver le théorème suivant, dû à Dirac (1952) :

“Un graphe simple de $k \geq 3$ sommets, chacun de degré supérieur ou égal à $\frac{k}{2}$, est hamiltonien.”

Considérons une disposition arbitraire des chevaliers :

$AB\dots A$

où A, B désignent des chevaliers différents, mais les deux A représentent le même (on est autour d'une table ronde).

Dans ce qui suit, on considérera la disposition comme une suite de personnes, ordonnée de gauche à droite.

Si deux voisins sont ennemis, on dira que c'est une *tension*.

S'il n'y a aucune tension, c'est fini.

S'il existe une tension, par symétrie circulaire, on peut toujours supposer que A et B sont ennemis.

Comme B a au plus $n - 1$ ennemis, on en déduit que B a au moins n amis (plus lui-même).

Supposons que dans la disposition ci-dessus et après B , on ne trouve jamais deux voisins A' et B' (dans cet ordre) qui soient amis respectivement de A et de B : Alors, comme une telle disposition n'arrive pas non plus avant B , on en déduit qu'elle n'apparaît jamais, et donc qu'à droite de chaque ami de A doit se trouver un ennemi de B . Donc, le nombre d'ennemis de B est au moins égal au nombre d'amis de A , ce qui implique $n - 1 \geq n$. Contradiction.

Par suite, on peut trouver deux voisins A' et B' (dans cet ordre) qui sont amis respectivement de A et de B .

La disposition est alors de la forme :

$$AB\dots A'B'\dots A$$

Dans ces conditions, on peut éliminer la tension entre A et B en renversant l'ordre des personnes entre B et A' :

$$A(B\dots A')B'\dots A \rightarrow A(A'\dots B)B'\dots A$$

Cela fournit une nouvelle disposition mais avec au moins une tension de moins que dans la précédente, puisque clairement la modification ne crée pas de nouvelle tension (par contre, elle peut éliminer une tension éventuelle entre A' et B'). En répétant cette procédure autant que nécessaire (un nombre fini de fois en tout cas, puisque le nombre initial de tensions est fini), on fait disparaître toutes les tensions, et l'objectif est atteint.

Exercice 32.

La plus grande valeur possible est $n = 2k$.

Soit n le nombre de sommets d'un polygone pour lequel une telle situation est possible.

Considérons le graphe complet \mathcal{K}_n dont les sommets sont les sommets du polygone. L'énoncé assure alors que ce graphe ne possède pas de cycle monochromatique (ici, en terme d'arêtes).

On va prouver que le nombre d'arêtes coloriées par une couleur donnée ne dépasse pas $n - 1$:

Par l'absurde : Supposons qu'au moins n arêtes soient d'une même couleur, disons vertes.

Considérons alors le sous-graphe de \mathcal{K}_n obtenus en ne conservant que les arêtes vertes. Ce sous-graphe possède n sommets et au moins n arêtes. D'après l'exercice I-1)b), il possède alors un cycle, qui est un cycle monochromatique de \mathcal{K}_n . Contradiction.

Comme on utilise k couleurs et qu'il y a en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes, on en déduit que $\frac{n(n-1)}{2} \leq k(n-1)$, et donc que $n \leq 2k$.

Il ne reste plus qu'à prouver que pour $n = 2k$ une telle configuration existe :

Par souci de simplicité, on va supposer que l'on travaille avec un polygone régulier avec $n = 2k$ sommets A_1, A_2, \dots, A_{2k} , mais une fois que l'on aura mis en évidence la coloration des arêtes, il est clair que celle-ci sera transposable pour tout polygone convexe.

On colorie la ligne brisée $A_1A_{2k}A_2, A_{2k-1}\dots A_kA_{k+1}$ de la couleur c_0 . Puis, pour tout $i \leq k - 1$, on colorie l'image de cette ligne brisée par la rotation de centre O du polygone et d'angle $\frac{i\pi}{k}$ (c'est ici qu'il est utile d'utiliser un polygone régulier) via la couleur c_i . Il n'est alors pas difficile de vérifier que le coloriage obtenu satisfait les conditions requises.

Exercice 33.

Considérons chacune des partitions comme la représentation d'un graphe planaire \mathcal{G} , dont les sommets sont les sommets du polygone, et les arêtes sont les côtés et les diagonales utilisées. Il s'agit de prouver qu'une au moins de ces partitions est eulérienne si et seulement si n est divisible par 3.

- Supposons que l'on ait une partition eulérienne :

Dans tout ce qui suit, les diagonales ne sont que celles utilisées dans la partition.

On sait que chaque sommet est de degré pair, et on peut supposer que $n > 3$, sans quoi il n'y a rien à faire.

On va prouver qu'en éliminant 3 arêtes bien choisies, il est possible de décomposer \mathcal{G} en deux sous-graphes eulériens n'ayant qu'un sommet en commun.

On commence par remarquer qu'une diagonale partage le polygone initial \mathcal{P} en deux sous-polygones \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , et que la triangulation de \mathcal{P} induit immédiatement des triangulations respectives de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . En répétant cette opération sur l'un de ces deux sous-polygones et ainsi de suite, on finira par trouver un triangle dont les sommets sont trois sommets de \mathcal{P} . Sans perte de généralité, on peut donc supposer que le triangle $A_n A_1 A_2$ est une face de la partition initiale.

Puisque A_n et A_2 sont tous deux de degrés pairs, il existe une diagonale d'extrémité A_2 et une diagonale d'extrémité A_n qui se rencontrent en un même sommet A_p où $2 < p < n$ (sinon, il existerait une face intérieure au polygone qui ne serait pas un triangle). Ainsi, le triangle $A_n A_p A_2$ est aussi une face, et on élimine les arêtes déterminées par les côtés de $A_n A_1 A_2$. Ce faisant, on décompose \mathcal{G} en deux sous-graphes n'ayant que le sommet A_p en commun. Et, pour chacun de ces sous-graphes, chacun des sommets est encore de degré pair, ce qui assure qu'ils sont bien tous les deux eulériens.

Comme chacun de ces deux sous-graphes est donné par une représentation plane qui correspond à un polygone convexe triangulé, on peut alors répéter cette procédure séparément sur chacun des sous-graphes. Et ainsi de suite jusqu'à ce que cela ne soit plus possible pour aucun des sous-graphes mis en évidence (à chaque étape, la subdivision d'un graphe fait apparaître deux sous-graphes ayant strictement moins de faces que le graphe dont ils dérivent, ce qui assure que la procédure finira). Or, si la décomposition n'est plus réalisable, c'est que l'on n'a plus que des sous-graphes qui sont eux-mêmes des triangles. Le nombre d'arêtes qui n'ont pas été éliminées au cours de la procédure est donc un multiple de 3. Comme chaque étape élimine 3 arêtes, c'est donc que le nombre initial d'arêtes est lui-même un multiple de 3. Or, initialement, il y a $2n - 3$ arêtes. Donc, n est un multiple de 3.

- Réciproquement : Si $n = 3m$.

On va construire une partition eulérienne par récurrence sur m .

Si $m = 1$, on a directement affaire à un triangle, et la conclusion est immédiate.

Soit $m \geq 1$ fixé. Supposons qu'il existe une partition eulérienne pour tout $3m$ -gone convexe.

Soit alors un $3(m+1)$ -gone convexe $A_1 A_2 \dots A_{3m+3}$. Par la diagonale $[A_1, A_5]$, on divise le polygone en un pentagone $A_1 A_2 \dots A_5$ et un $3m$ -gone $A_1 A_5 A_6 \dots A_{3m+3}$. L'hypothèse de récurrence assure qu'il existe un partition eulérienne du $3m$ -gone. On partitionne ensuite le pentagone à l'aide des diagonales $[A_1, A_3]$ et $[A_3, A_5]$.

Il existe alors un cycle eulérien sur le pentagone privé de l'arête $[A_1, A_5]$, par exemple $A_1 A_3 A_5 A_4 A_3 A_2 A_1$. En raccordant ces deux cycles en A_1 , on construit ainsi un cycle eulérien sur le $3(m+1)$ -gone.

Références

- [1] C.Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod.
- [2] D.B.West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall.
- [3] R.J.Trudeau, *Introduction to Graph Theory*, Dover.
- [4] N.Hartsfield, G.Ringel, *Pearls in Graph Theory, A comprehensive course*, Academic Press.
- [5] M.Capobianco, J.C.Molluzzo, *Examples and counterexamples in Graph Theory*, North-Holland.
- [6] L.Lovász, *Combinatorial problems and exercises*, North-Holland.
- [7] I.Tomescu, *Problems in Combinatorics and Graph Theory*, Wiley-Interscience.