Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \text{ existe} &\Leftrightarrow \operatorname{ch}x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \in]-1,1[\\ &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \in [0,1[\end{aligned}$$

Mais, d'une part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geqslant 0$ et d'autre part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} = \frac{\operatorname{ch}x+1-2}{\operatorname{ch}x+1} = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}x+1} < 1$. L'expression proposée existe donc pour tout réel x et est paire. Ensuite, pour x réel positif, on a

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}}{1-\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}} &= \frac{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}-\sqrt{\operatorname{ch}x-1}} = \frac{(\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1})^2}{(\operatorname{ch}x+1)-(\operatorname{ch}x-1)} = \frac{2\operatorname{ch}x+2\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{2} \\ &= \operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2x} = \operatorname{ch}x+|\operatorname{sh}x| = \operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x = e^x \end{aligned}$$

Par suite, x étant toujours positif,

$$\operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} = \frac{1}{2}\ln(e^x) = \frac{x}{2}.$$

Par parité, on a alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right) = \frac{|x|}{2}.}$$

(Remarque. Pour 5), 6) et 7), on peut aussi dériver chaque expression)