Exercice 1 : Partie A.

3) $u_0 = 13$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + \frac{4}{5}$

- • Notons (P_n) la proposition :

$u_n = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 13$

(P_0) est vraie.

• Hérédité : Supposons (P_n) vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + \frac{4}{5}$

Donc $u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{4}{5}$

$= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) + \frac{4}{5}$

$= \frac{1}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} + \frac{4}{5}$

$= 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$

(P_{n+1}) est vraie.

• Conclusion : (P_0) est vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) entraine (P_{n+1}), donc d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie.

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{12}{5^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

$S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ Les termes de la suite (u_n) sont positifs. La suite (S_n) est donc croissante.

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k}$ avec $u_0 = 1$ et $r = \frac{1}{5}$. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} = \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)$

$S_n = n + 1 + 12 \times \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) = n + 16 - \frac{15}{5^{n+1}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{15}{5^{n+1}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+16) = +\infty$, donc $\lim S_n = +\infty$

PARTIE B

A. FAUX

B. FAUX, la suite (u_n) est décroissante et la suite (S_n) est croissante.