Fonctions linéaires et fonctions affines

I Définitions

Définitions :

☞ On appelle **fonction affine** toute fonction qui, à tout nombre noté x, associe le nombre $a \times x + b$ (c'est à dire $x \longmapsto a \times x + b$) où a et b sont deux nombres.
☞ On appelle **fonction linéaire** de coefficient a toute fonction qui, à tout nombre noté x, associe le nombre $a \times x$ (c'est à dire $x \longmapsto a \times x$) où a est un nombre.

Remarque :

Une fonction linéaire est une fonction affine particulière. (Cas où $b = 0$.)

Exemples :

➪ Soit $f : x \longmapsto 2x$. La fonction f est linéaire de coefficient 2.
➪ Soit $g : x \longmapsto x^2 - 4$. La fonction g n'est ni linéaire ni affine.
➪ Soit $h : x \longmapsto 5x - 2$. La fonction h est affine avec $a = 5$ et $b = -2$.

II Représentation graphique

Propriétés :

☞ La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ est une droite.
a s'appelle le **coefficient directeur** de la droite.
b s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de la droite.

☞ La représentation graphique d'une fonction linéaire $f : x \longmapsto ax$ est une droite passant par l'origine du repère.

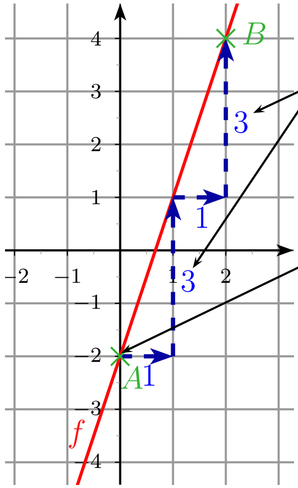
Exemple : *Tracer la fonction* $f : x \longmapsto 3x - 2$.

La fonction f est affine donc sa représentation graphique est une droite.
Il nous suffit de deux points :

x	0	2
$f(x)$	-2	4

On obtient les coordonnées de deux points : $A(0; -2)$ et $B(2; 4)$.

On place ces points dans un repère puis on trace la droite.



On peut lire graphiquement le coefficient directeur de la droite. (Ici $a = 3$.)

On peut lire graphiquement l'ordonnée à l'origine. (Ici $b = -2$.)

Cette droite est la représentation graphique de la fonction $f(x) = 3x - 2$.

III Calculs algébriques

Propriété :

Soient x_1 et x_2 deux nombres distincts et soit f une fonction affine.
☞ La droite représentative de f passe par les points de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$.
☞ Le coefficient directeur de cette droite est donné par le calcul suivant : $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Exemple : *Quelle est l'expression algébrique de la fonction affine dont la droite représentative passe par les points $A : (3; 4)$ et $B : (-2; 1)$?*

Soit f cette fonction. Elle s'écrit $f(x) = ax + b$. *(Il faut trouver a et b.)*

➪ **Coefficient directeur :**

On effectue le calcul suivant : $a = \dfrac{1-4}{-2-3} = \dfrac{-3}{-5} = 0,8$.

Donc $f(x) = 0,8x + b$.

➪ **Ordonnée à l'origine :**

Cette droite passe par le point $A : (3; 4)$ donc l'image de 3 par f est 4.

Autrement dit, $f(3) = 4$. On obtient alors une équation :

$f(3) = 0,8 \times 3 + b$ ou encore $\boxed{4 = 0,8 \times 3 + b}$

$$\begin{aligned} 4 &= 2,4 + b \\ 4 - 2,4 &= b \\ 1,6 &= b \end{aligned}$$

L'expression alébrique de f est donc : $f(x) = 0,8x + 1,6$.

W.Laidet