Partie B :

1) Pour étudier les variations de fn sur $[0;+\infty[$, on commence par chercher la dérivée.

$$f_n'(x) = \frac{(x+n)-(x-n)}{(x+n)^2} - (-e^{-x})$$

$$= \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}$$

Comme n est un entier naturel, le quotient est positif. On ajoute à ce dernier une fonction exponentielle qui ne s'annule jamais donc e^{-x} est positif. Ainsi $f_n'(x) > 0$ et le tableau ressemble à la fonc° f étudiée précédemment.

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	-2	$\nearrow$	1

2) a. $f_n(n) = \frac{n-n}{n+n} - e^{-n}$

$= 0 - e^{-n}$

$= -\frac{1}{e^n}$

e^n est une fonction exponentielle qui est toujours positive donc

$-\frac{1}{e^n} < 0$.

b. Initialisation :

Si $n = 1$ alors $e^2 > 3$. Ce qui est vrai puisque $e^2 \simeq 2^2 \simeq 4$.

L'hypothèse est donc vérifiée.

Si $n = 0$, alors $e^1 > 1$. Ce qui est vrai puisque l'on sait $e^1 = e \simeq 2{,}72$