

Exercice 1 : Equation de Pell-Fermat

Le but de l'exercice est de déterminer des couples $(a; b)$ d'entiers vérifiant l'égalité (1) :

$$a^2 - 2b^2 = 1$$

1. On suppose que $(a; b)$ est solution.
 - a. Prouver que a est impair.
 - b. En déduire que $a^2 - 1$ est multiple de 4 puis que b est pair.
 - c. Montrer que a et b sont premiers entre eux
2.
 - a. Déterminer une solution évidente de l'équation (1).
 - b. Montrer que si $(a; b)$ est solution de (1), le couple $(3a + 4b; 2a + 3b)$ l'est également.
 - c. Déterminer 3 autres solutions de (1).

Exercice 2 :

n est un entier naturel strictement supérieur à 1.

On pose $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$

1. Calculer $B - (n - 2)A$.
2.
 - a. Démontrer que le PGCD de A et B est égal au PGCD de A et 4.
 - b. Quelles sont les valeurs possibles pour le PGCD de A et B ?
 - c. Déterminer, suivant les valeurs de n , le PGCD de A et B .
3. Pour quelles valeurs de n le nombre $\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il entier ?