BCPST1 2014-2015 DenombP1

Devoir Libre

MATHEMATIQUES

Pour 5 novembre 2014

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé.
Soit n un entier naturel.
On note A, B et C les points de coordonnées : $A(n, 0)$, $B(n, n)$, $C(0, n)$.

Soit E l'ensemble des points M du plan dont l'abscisse x et l'ordonnée y vérifient :

$$\begin{cases}(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\\ 0\le x\le n\\ 0\le y\le n\end{cases}$$

Partie I :

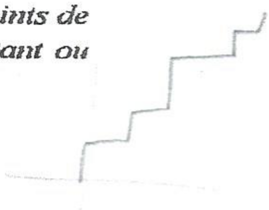
1°) *a) Déterminer le nombre d'éléments de E.*
b) Déterminer le nombre de segments (non réduits à un point) du plan dont les extrémités sont des points de E.

2°) *Déterminer le nombre de rectangles (non aplatis ni réduits à un point) à côtés parallèles aux axes dont les sommets sont des points de E.*

3°) *a) Déterminer le nombre de carrés (non réduits à un point) à côtés parallèles aux axes dont les sommets sont des points de E.*
b) Calculer la somme des périmètres de ces carrés.

Partie II :

Soit p un entier naturel; on appelle parcours toute suite finie $(M_k)_{0\le k\le p}$ de $p+1$ points de E telle que : pour tout entier k de $[0, p-1]$, on passe de M_k à M_{k+1} en augmentant ou bien l'abscisse ou bien l'ordonnée d'une unité.
On appelle longueur du parcours l'entier p.



1°) *Soit M un point de E de coordonnées (x, y).*
a) Déterminer la longueur d'un parcours reliant O à M.
b) Montrer que le nombre de parcours reliant O à M est $\binom{x+y}{x}$

2°) *a) Pour tout entier $p \le n$ déterminer le nombre de parcours de longueur p partant de O.*
b) Pour tout entier $p > n$, donner une expression du nombre de parcours de longueur p partant de O.

3°) *a) Soit M un point de E de coordonnées (x, y). Calculer le nombre K_x^y de parcours allant de O à B et passant par M.*

b) Soit k un entier de $[0, 2n]$.
Soit S_k l'ensemble des points M de E dont les coordonnées vérifient $x+y = k$.
Calculer la somme des nombres K_x^y lorsque le point $M(x, y)$ décrit S_k.

En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}^2$.