Pour aller plus loin

76 L'inégalité de Huygens

f est la fonction définie sur $I = \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = 2\sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 3x\,.$$

1. Justifiez que, sur l'intervalle I, le signe de $f'(x)$ est celui de $2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1$.

2. Soit P le polynome défini sur $]0\,;1]$ par :

$$P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1.$$

Étudiez le signe de P(X) sur $]0\,;1]$.

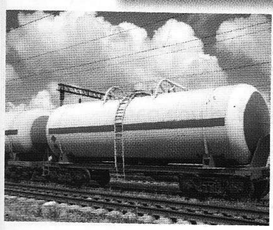
3. Déduisez-en le signe de $f'(x)$, puis les variations de f sur l'intervalle I.

4. Prouvez alors que, pour tout nombre x de I,

$$2\sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant 3x\,.$$

Remarque. *Christian Huygens (1629-1695), mathématicien et physicien néerlandais, a joué un rôle fondamental dans le développement du calcul moderne. Il est célèbre pour la formulation de la théorie ondulatoire de la lumière et le calcul de la force centrifuge.*

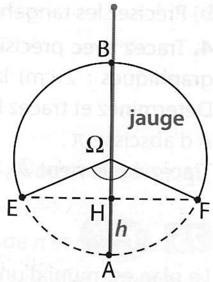
77 ALGORITHMIQUE



La cuve d'un wagon citerne a la forme d'un cylindre de 3 m de diamètre sur 11 m de long.

1. Déterminez le volume total de cette citerne.

2. On donne ci-contre une coupe transversale de la citerne. On note h la longueur du segment [AH], $\mathcal{V}$ le volume de liquide présent dans la citerne pour une hauteur h de liquide et α l'angle $(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega F})$.



a) Exprimez, en fonction de α, le volume de liquide présent dans la citerne, puis h.

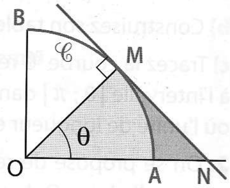
b) Écrivez un algorithme permettant de compléter la table suivante.

Volume (en litre)	10 000	20 000	30 000	…
Hauteur de liquide (à 0,1 m près)				

3. On souhaite mettre en place une jauge qui permette d'évaluer le volume de liquide présent dans la citerne. Cette jauge sera graduée en dizaines de milliers de litres. Représentez cette jauge à l'échelle 1/20 avec une précision de 1 mm.

78 Comparer des aires TICE

$\mathscr{C}$ est un quart de cercle de rayon 1 et M un point de $\mathscr{C}$. On note $\widehat{AOM} = \theta$ avec $\theta \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. La tangente en M à $\mathscr{C}$ coupe (OA) en N.



Le but de cet exercice est de comparer les aires des domaines coloriés en orange et en vert. On note $f(\theta)$ l'aire du domaine orange et $g(\theta)$ l'aire du domaine vert.

1. Conjecturer avec GeoGebra

Construisez la figure. Créez le secteur circulaire OAM, le triangle OMN et l'angle θ.

Déplacez le point M sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et comparez les deux aires pour conjecturer.

2. Démontrer

On note h la fonction définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta).$$

a) Démontrez que pour θ de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$h(\theta) = \frac{1}{2}\left(2\theta - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right).$$

b) Démontrez que pour θ de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

$$h'(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{2\cos^2(\theta)}.$$

c) Étudiez les variations de h et dressez son tableau de variation.

d) Démontrez qu'il existe un unique nombre α dans l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

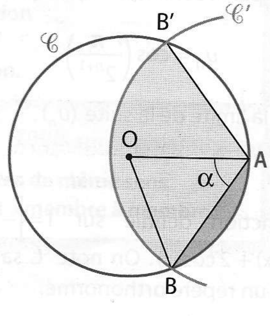
Encadrez α dans un intervalle d'amplitude 10^{-1}.

e) Comparez alors les aires des deux domaines.

79 Aire commune à deux disques

Partie A.

On considère un disque $\mathscr{D}$ de centre O et de rayon R délimité par un cercle $\mathscr{C}$ et A un point de $\mathscr{C}$.



Le but de l'exercice e…
qui partage le disqu…

On appelle B et B′ le…

On note α la mesure de l'angle $\widehat{OAB}$.

1. Démontrez que le… $2R\cos(\alpha)$.

2. a) Déterminez une… en fonction de α.

b) Déduisez-en l'aire $\widehat{AOB}$ du disque $\mathscr{D}$ en…

3. a) Calculez, en unit…

b) Déduisez-en l'aire… figure.

4. On appelle $\mathscr{D}'$ le d… délimité par $\mathscr{C}'$.

Calculez l'aire du dom…

5. a) On note $\mathscr{A}$ l'aire… Calculez $\mathscr{A}$.

b) Démontrez que… même aire si, et seulem…

2α cos…

Partie B.

On note g la fonction…

$g(x) =$ …

1. Calculez, pour tout… l'équation $g'(x) = 0$.

2. Dressez le tableau… $g(0)$ et $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. a) Déduisez-en l'exi… α_0 solution de l'équa…

b) Déterminez un enca…

4. Concluez.

80 Un calcul de lim…

1. Établissez successi… variations de fonctio… suivantes pour tout nom…

a) $\sin(x) \leqslant x$;

c) $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$;

2. Déduisez-en pour tout… encadrement de sin…

3. Calculez :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - …}{x^2}$$