

DM : Factorisation d'un polynôme de degré 3

1. Vérifier que $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + x \times x_0 + x_0^2)$.
2. Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré 3 **dont on connaît une racine** x_0 .
Justifier les affirmations suivantes :
 - $P(x_0) = 0$
 - $P(x) = (x - x_0)Q(x)$
 - $P(x) = a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0)$
3. En déduire qu'il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 tel que $P(x) = (x - x_0)Q(x)$.
Remarque : cette partie fournit l'existence. Pour la détermination, on peut utiliser d'autre(s) stratégie(s).
4. Application : On pose $P(x) = x^3 + 4x^2 - 14x + 9$.
 - Vérifier que 1 est racine de $P(x)$.
 - Déterminer le polynôme $Q(x)$ dont l'existence a été démontrée précédemment.
5. Application : résoudre l'équation $x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$.
6. Application : résoudre l'équation $x^3 + 11x^2 + 11x + 10 = 0$.