Planche n° 1. Trigonométrie circulaire

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 (*IT) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1) $\sin x = 0$ **2)** $\sin x = 1$ **3)** $\sin x = -1$ **4)** $\cos x = 1$ **5)** $\cos x = -1$ **6)** $\cos x = 0$ **7)** $\tan x = 0$
8) $\tan x = 1$.

n° 2 (*IT) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1) $\sin x = \dfrac{1}{2}$ **2)** $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **3)** $\tan x = -1$ **4)** $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **5)** $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **6)** $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

n° 3(IT)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1) $\sin(2x) = \dfrac{1}{2},\ I = [0, 2\pi]$ **2)** $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ I = [0, 4\pi]$ **3)** $\tan(5x) = 1,\ I = [0, \pi]$
4) $\cos(2x) = \cos^2 x,\ I = [0, 2\pi]$ **5)** $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0,\ I = [0, 2\pi]$ **6)** $\cos(nx) = 0\ (n \in \mathbb{N}^*)$
7) $|\cos(nx)| = 1$ **8)** $\sin(nx) = 0$ **9)** $|\sin(nx)| = 1$
10) $\sin x = \tan x,\ I = [0, 2\pi]$ **11)** $\sin(2x) + \sin x = 0,\ I = [0, 2\pi]$ **12)** $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2,\ I = [-\pi, \pi]$

n° 4 (IT)** Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1) $\cos x \leq \dfrac{1}{2},\ I = [-\pi, \pi]$ **2)** $\sin x \geq -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ I = \mathbb{R}$ **3)** $\cos x > \cos\dfrac{x}{2},\ I = [0, 2\pi]$
4) $\cos^2 x \geq \cos(2x),\ I = [-\pi, \pi]$ **5)** $\cos^2 x \leq \dfrac{1}{2},\ I = [0, 2\pi]$ **6)** $\cos\dfrac{x}{3} \leq \sin\dfrac{x}{3},\ I = [0, 2\pi]$.

n° 5 (*I) Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

n° 6 (*I) Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

n° 7 (***) Montrer que $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

n° 8 (*I) 1)** Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour a élément donné de $]0, \pi[$ (penser à $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$).

2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$.

n° 9 (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{4\cos^2 x+1} + 16.2^{4\sin^2 x-3} = 20$.

n° 10 (***) Soit a un réel distinct de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
1) Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

n° 11 (****) On veut calculer $S = \tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$.

1) Calculer $\tan(5x)$ en fonction de $\tan x$.
2) En déduire un polynôme de degré 4 dont les racines sont $\tan 9°$, $-\tan 27°$, $-\tan 63°$ et $\tan 81°$ puis la valeur de S.

n° 12 (***) Combien l'équation

$$\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0,$$

possède-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

n° 13 (I)** On veut calculer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$. Pour cela, on pose $a = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $b = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $z = e^{2i\pi/5}$.

1) Vérifier que $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.
2) Vérifier que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
3) En déduire un polynôme de degré 2 dont les racines sont a et b puis les valeurs exactes de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

n° 14 (I)** Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \cos^2 x$ **2)** $x \mapsto \cos^4 x$ **3)** $x \mapsto \sin^4 x$ **4)** $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$ **5)** $x \mapsto \sin^6 x$
6) $x \mapsto \cos x \sin^6 x$ **7)** $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$ **8)** $x \mapsto \cos^3 x$.

n° 15 (**) Calculer $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx$ et $J = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx$.

n° 16 (**) Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1) $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan\dfrac{x}{2}$ **2)** $\sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$
3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{2}{\cos(2x)}$ **4)** $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$.

n° 17 (***) Soit k un réel distinct de -1 et de 1.

1) Etudier les variations de $f_k \; : \; x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - 2k\cos x + k^2}}$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f_k(x) \, dx$.

n° 18 (*I)** Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

n° 19 (***) Résoudre le système $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$ où a, b et c sont trois réels.

n° 20 (**) Montrer que $\cos^4\dfrac{\pi}{8} + \cos^4\dfrac{3\pi}{8} + \cos^4\dfrac{5\pi}{8} + \cos^4\dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{3}{2}$.

n° 21 (***) **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.
2) En déduire les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour x élément de $\left\{\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{5}, \dfrac{3\pi}{10}\right\}$.

