

DM de Mathématiques

Exercice 1

1. On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0; \pi]$ par :

$$g(x) = x \cos x - \sin x$$

Etudier g et dresser son tableau de variation

En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0; \pi]$

La fonction g est dérivable sur son ensemble de définition

On note :

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$v(x) = \cos x \quad v'(x) = -\sin x$$

On a alors :

$$g'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = \cos x - x \sin x$$

$$g'(x) = \cos x - x \sin x$$

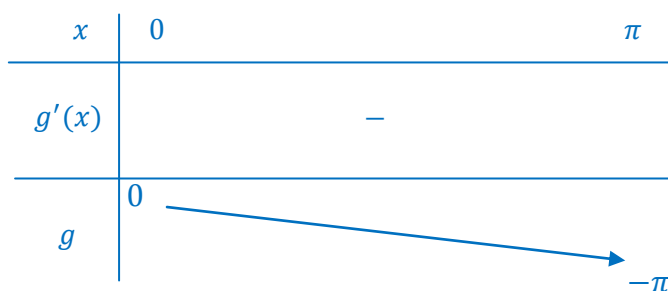
$$g'(x) = -x \sin x$$

Pour étudier le signe de $g'(x)$, on note :

$$0 \leq \sin x \leq 1$$

$$0 \geq -x \sin x \geq -x$$

On a alors :



$$\forall x \in [0; \pi], g(x) \leq 0$$

2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0; \pi]$ par :

$$\begin{cases} x = 0, & f(0) = 1 \\ x \in]0; \pi], & f(x) = \frac{\sin x}{x} \end{cases}$$

$$\text{On rappelle que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Etudier les variations de f sur $]0; \pi]$

La fonction f est dérivable sur $]0; \pi]$

On note :

$$u(x) = \sin x \quad u'(x) = \cos x$$

$$v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

On a alors :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

Or $\forall x \in [0; \pi], g(x) \leq 0$ et $x^2 \geq 0$

Donc $f'(x) \leq 0$

On a donc f décroissante sur $]0; \pi]$, $f(0) = 1$ et $f(\pi) = 0$

3. Etude de f en 0

(a) Prouver que, pour tout nombre réel $x \geq 0$: $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$

(Pour cela on introduira la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$; on calculera les dérivées $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ et on déduira le signe de φ .)

On calcule :

$$\varphi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Puis } \varphi''(x) = -\sin x + x$$

$$\text{Et enfin } \varphi'''(x) = -\cos x + 1$$

$$\text{Or } -\cos x \geq -1$$

$$\text{Donc } -\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \varphi'''(x) \geq 0$$

$\varphi'''(x)$ est positive donc φ'' est croissante et $\forall x \geq 0, \varphi''(x) \geq \varphi''(0) = 0$

On a donc $\varphi''(x)$ est positive et on a : $-\sin x + x \geq 0$

donc φ' est croissante et $\forall x \geq 0, \varphi'(x) \geq \varphi'(0) = 0$

Donc $\varphi'(x)$ est positive et φ est croissante et $\forall x \geq 0, \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$

Donc $\varphi(x)$ est positive et : $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$

On a alors :

$$-\sin x + x \geq 0$$

$$\text{Et } \sin x - x - \frac{x^3}{6} \geq 0$$

$$\sin x + x \leq \frac{x^3}{6}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \sin x - x \leq \frac{x^3}{6}$$

(b) Prouver que f est dérivable au point 0 et calculer $f'(0)$

f est définie sur $[0; \pi]$ et $0 \in [0; \pi]$

$$\text{Soit } h \neq 0, r_a(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{\sin h}{h}-1}{h}$$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ donc $r_a(h) = 0$ quand h tend vers 0

f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$