Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** Soit G la variable aléatoire égale au nombre de groupes absents. G suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \dfrac{1}{8}$.
La probabilité cherchée est donc :
$p(G = 0) = \dbinom{12}{0}\left(\dfrac{1}{8}\right)^0\left(\dfrac{7}{8}\right)^{12} = \dfrac{7^{12}}{8^{12}} \approx 0,201.$
On a donc $0,20 < p(G = 0) < 0,21$.

   b. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \dfrac{7^{12}}{8^{12}}$. $X = 30$ signifie que tous les jours les 12 groupes se sont présentés.
On a $p(X = 30) = \dbinom{30}{30}\left(\dfrac{7^{12}}{8^{12}}\right)^{30}\left(1 - \dfrac{7^{12}}{8^{12}}\right)^0 \approx 1,3 \times 10^{-21}$. Au centième près cete probabilité est nulle.
$X = 0$ signifie que tous les jours les 12 groupes ne se sont pas présentés. La probabilité de cet évènement est donc égale à :
$p(X = 0) = \dbinom{30}{0}\left(\dfrac{7^{12}}{8^{12}}\right)^0\left(1 - \dfrac{7^{12}}{8^{12}}\right)^{30} \approx 0,001\,2$. Au centième près cette probabilité est aussi nulle. On a $\text{E} = n \times p = 30 \times \left(\dfrac{7}{8}\right)^{12} \approx 6,042$ soit 6,04 au centième près Ce résultat signifie qu'en moyenne tous les groupes sont présents 6 jours par mois.

   c. On a $P(S = 1) = P(G = 11) = \dbinom{12}{11}\left(\dfrac{7}{8}\right)^{11}\left(1 - \dfrac{7}{8}\right)^1 \approx 0,35$ au centième. S suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \dfrac{7}{8}$, donc $\text{E}(S) = 12 \times \dfrac{7}{8} = \dfrac{21}{2} = 10,5$.
En moyenne l'association percevera 10,5 Crédits chaque jour.

2. **a.** On a la même loi binomiale que dans la question 1, mais avec $n = 13$.
La probabilité que les 13 groupes soient présents est égale à :
$P_{13} = \dbinom{13}{13}\left(\dfrac{7}{8}\right)^{13}\left(1 - \dfrac{7}{8}\right)^0 = \dfrac{7^8}{8^8} \approx 0,176.$
Au centième près la probabilité est donc égale à 0,18.

   b. On ne peut avoir que $R = 0$ quand au moins un groupe est absent et $R = 2$ quand tous les groupes inscrits sont présents.
On vient de voir que $P(R = 2) = P_{13} \approx 0,18$ et donc $P(R = 0) = 1 - P(R = 2) \approx 0,82$.
D'où la loi de probabilité de R :

r_i	0	2
$P(R = r_i)$	0,82	0,18

   Donc l'espérance mathématique de R est :
$\text{E}(R) = 0 \times 0,82 + 2 \times 0,18 = 0,36$.

   c. ⚠ Il faut distinguer deux cas : celui ou le nombre de groupes présents est inférieur ou égal à 12 et celui où les 13 groupes sont présents.
   - Dans le premier cas si k groupes sont présents le gain est de k Crédits avec une probabilité égale à $\dbinom{13}{k}\left(\dfrac{7}{8}\right)^k\left(1 - \dfrac{7}{8}\right)^{13-k}$.

• Dans le second cas si les 13 groupes sont présents le gain ne sera que de (13 − 2) Crédits avec une probabilité égale à P_{13}.
Donc le gain moyen journalier est égal à :

$$\sum_{k=0}^{12} k\times\binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^k\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}+(13-2)P_{13}=\sum_{k=0}^{12} k\times\binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^k\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}+13P_{13}-2P_{13}$$

soit

$$\sum_{k=0}^{12} k\times\binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^k\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}+13\times\left(\frac{7}{8}\right)^{13}-2P_{13}=\sum_{k=0}^{13} k\times\binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^k\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}-2P_{13}.$$

Ce gain est donc égal à : $13\times\dfrac{7}{8}-2\times 0,18\approx 11,015\approx 11,02$ Crédits.

d. Cette dernière espérance étant supérieure à celle obtenue en ne prenant que 12 groupes, la décision du dirgeant est rentable.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3+ux^2+vx-14=0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. **a.** $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation (1) signifie que :

$78\times\left(\dfrac{14}{39}\right)^3+u\left(\dfrac{14}{39}\right)^2+\dfrac{14}{39}v-14=0$

soit par produit par 39^2

$2\times 14^3+14u+14\times 39v-14\times 39^2=0\iff 14u+39v=1\,129.$

b. $39=3\times 13$ et $14=2\times 7$ sont premiers entre eux. On sait qu'il existe un couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers vérifiant $14x+39y=1$.

L'algorithme d'Euclide donne : $\begin{array}{rcl}39&=&2\times 14+11\\14&=&1\times 11+3\\11&=&3\times 3+2\\3&=&1\times 2+1\end{array}$

soit en remontant

$$\begin{array}{lcl}3-2&=&1\\3-(11-3\times 3)&=&1\iff 4\times 3-11=1\\14-(1\times 11)&=&3\Rightarrow 4[14-11]-11=1\iff 4\times 14-5\times 11=1\\39-2\times 14&=&11\Rightarrow 4\times 14-5(39-2\times 14)=1\iff -5\times 39+14\times 14=1\end{array}$$

On a donc trouvé $x=14,\ y=-5$.

On a $-25\times 14+9\times 39=-350+351=1$. Donc le couple $(-25\ ;\ 9)$ est aussi solution de l'équation.

c. $-25\times 14+9\times 39=1\Rightarrow -25\times 1\,129\times 14+9\times 1\,129\times 39=1\,129\iff$
$14\times -28225+39\times 10161=1\,129.$

Le couple $\left(u_{0\ ;\ v_0}\right)=(-28225\ ;\ 10161)$ est donc solution de l'équation $14u+39v=1\,129$.

On a :

$14u+39v=1\,129$

$14\times -28225+39\times 10161=1\,129$

d'où par différence :

$14(u+28225)+39(v-10161) = 0 \iff 14(u+28225) = 39(10161-v)$. (1)

Donc 14 divisant $39(10161 - v)$ et étant premier avec 39, divise $(10161 - v)$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10161 - v = 14k \iff v = 10161 - 14k$, puis en reportant dans l'égalité (1) :

$14(u + 28225) = 39(14k) \iff u + 28225 = 39k \iff u = 39k - 28225$.

L'ensemble des couples solutions est donc

$S = \{(39k - 28225\ ;\ 10161 - 14k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

d. On a $39k - 28225 = 0 \iff k = \dfrac{28225}{39} \approx 724$.

Vérification : $39 \times 724 - 28225 = 11$ et $39 \times 723 - 28225 = -28$.

On en déduit $v = 10161 - 14 \times 724 = 25$.

Le couple solution avec le plus petit premier terme naturel est (11 ; 25).

2. **a.** $78 = 2 \times 3 \times 13$ et $14 = 2 \times 7$ On a $\mathcal{D}_{78} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 13\ ;\ 26\ ;\ 39\ ;\ 78\}$ et $\mathcal{D}_{14} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 7\ ;\ 14\}$.

b. $\dfrac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) signifie

$78\dfrac{P^3}{Q^3} + u\dfrac{P^2}{Q^2} + v\dfrac{P}{Q} - 14 = 0 \iff 78P^3 + uP^2Q + vPQ^2 - 14Q^3 = 0 \iff P\left(78P^2 + uPQ + vQ^2\right) = 14Q^3$.

Comme P divise $14Q^3$ et est premier avec Q, il divise 14.

De même on peut écrire $14Q^3 - vPQ^2 - uP^2Q = 78P^3 \iff Q\left(14Q^2 - vPQ - uP^2\right) = 78P^3$.

Q divise $78P^3$, est premier avec P donc avec P^3 : il divise 78.

c. On a donc $P \in \mathcal{D}_{14}$ et aussi leurs opposés et $Q \in \mathcal{D}_{78}$ et leurs opposés.

En théorie il y a $4 \times 8 = 32$ possibilités avec des termes positifs, mais comme P et Q doivent être premiers entre eux, si P est pair Q ne peut l'être et inversement. Il faut donc enlever $2 \times 4 = 8$ couples. Il faut également enlever les 4 couples avec $Q = 1$ qui donnent une solution entière.

Il reste donc 20 couples positifs et autant de négatifs, soit 40 couples possibles.

Les 20 rationnels positifs non entiers possibles sont :

$\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{13}\ ;\ \dfrac{1}{26}\ ;\ \dfrac{1}{39}\ ;\ \dfrac{1}{78}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{2}{13}\ ;\ \dfrac{2}{39}\ ;\ \dfrac{7}{2}\ ;\ \dfrac{7}{3}\ ;\ \dfrac{7}{6}\ ;\ \dfrac{7}{13}\ ;\ \dfrac{7}{26}\ ;\ \dfrac{7}{39}\ ;\ \dfrac{7}{78}\ ;\ \dfrac{14}{3}\ ;\ \dfrac{14}{13}\ ;\ \dfrac{14}{39}$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - étude préliminaire d'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)\mathrm{e}^x - 1$

1. • En $-\infty$: $f(x) = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1$.

En posant $y = -x$, $-x\mathrm{e}^x = y\mathrm{e}^{-y} = \dfrac{y}{\mathrm{e}^y}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -x\mathrm{e}^x = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\mathrm{e}^y} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} = -1$.

• En $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2 - x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc par produit de limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.

2. φ est une somme de produits de fonctions continuez et dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\varphi'(x) = -\mathrm{e}^+(2 - x)\mathrm{e}^x = (1 - x)\mathrm{e}^x$ qui est du signe de $(1 - x)$ car quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.

On a donc $\varphi'(x) > 0 \iff x < 1$, $\varphi'(x) < 0 \iff x > 1$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	-	
φ	-1	$\nearrow$	$\mathrm{e}-1$	$\searrow$	$-\infty$

On a $\varphi(-2) = 4\mathrm{e}^{-2} - 1 \approx -0,45$.

$\varphi(0) = 2-1 = 1$, $\varphi(1) = \mathrm{e}-1$ et enfin $\varphi(2) = 0-1 = -1$

3. On a $\varphi(-2) < 0$ et $\varphi(0) > 0$; la fonction φ étant continue et croissante sur $]-2\ ;\ 0[$ elle s'annule une seule fois en $\alpha \in]-2\ ;\ 0[$.

De la même façon elle s'annule en $\beta \in [1\ ;\ 2]$.

4. La calculatrice donne $-1,15 < \alpha < -1,14$ et $1,84 < \beta < 1,85$.

5. On sait que $\varphi(\alpha) = 0 \iff (2-\alpha)\mathrm{e}^{\alpha} - 1 = 0 \iff (2-\alpha)\mathrm{e}^{\alpha} = 1 \iff \mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$ (car $\alpha \neq 2$).

Partie B - Étude d'une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$ et calcul intégral

1. Soit e la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e(x) = \mathrm{e}^x - x$. Cette fonction est dérivable et pour tout x, $e'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ qui s'annule pour $x = 0$.

Donc sur $\mathbb{R}_-$, $e'(x) < 0$, donc e est décroissante de $+\infty$ à 1, et sur $\mathbb{R}_+$, $e'(x) > 0$, donc e est croissante de 1 à $+\infty$.

Le minimum de la fonction est égal à 1, donc pour tout x réel $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$.

Conclusion : f est définie pour tout réel.

2. On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 1 = -1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - x = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On peut écrire en factorisant puis en simplifiant par le facteur non nul e^x :

$f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1 - x\mathrm{e}^{-x}}$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - x\mathrm{e}^{-x} = 1$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

3. f quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sut $\mathbb{R}$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - x) - (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} =$

$\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x - x)^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - x)^2} = \dfrac{\varphi(x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\varphi(x)$ vu à la partie A.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

4. On a $f(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha} - \alpha}$.

On a vu dans la partie précédente que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$, donc en remplaçant les exponentieles :

$$f(\alpha) = \dfrac{\dfrac{1}{2-\alpha} - 1}{\dfrac{1}{2-\alpha} - \alpha} = \dfrac{1 - 2 + \alpha}{1 - 2\alpha + \alpha^2} = \dfrac{\alpha - 1}{(\alpha-1)^2} = \dfrac{1}{\alpha - 1}.$$

5. On a vu que si $e(x) = e^x - x$, $e'(x) = e^x - 1$, donc $f(x) = \dfrac{e'(x)}{e(x)}$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \ln|e(x)| = \ln e(x) = \ln\left(e^x - x\right)$ (car on a vu que $e(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$).

$$\int_0^1 \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}\,dx.$$

On a donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1 = \left[\ln\left(e^x - x\right)\right]_0^1 = \ln(e-1) - \ln 1 = (e-1) \approx$ 0,541 3 $\approx 0,54$. (au centième près)

Partie C - Étude de deux suites

1. La fonction est définie si $\dfrac{1}{2-x} > 0 \iff 2 - x > 0 \iff x < 2$.

On a donc $D_g =]-\infty~;~2[$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$ est croissante sur $]-\infty~;~2[$ et la fonction ln est croissante sur $]0~;~+\infty[$, donc par composition, la fonction g est croissante sur $]-\infty~;~2[$.

De même les deux fonctions étant continues, la fonction g est continue sur $]-\infty~;~2[$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2-x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to 2} g(x) = +\infty$.

2. On admet que que l'image par g de l'intervalle $I = [-2~;~0]$ est incluse dans cet intervalle.

a. $u_1 = g(u_0) = g(-2) = \ln\left[\dfrac{1}{2-(-2)}\right] = \ln\left[\dfrac{1}{4}\right] = -2\ln 2 \in [-2~;~0]$.

Initialisation : on a donc $u_1 \in [-2~;~0]$.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [-2~;~0]$.

On a donc $-2 \leqslant u_n \leqslant 0$. Par croissance de la fonction g, on a donc :

$g(-2) \leqslant g(u_n) \leqslant g(0) \iff \ln\left[\dfrac{1}{4}\right] \leqslant g(u_n) \leqslant \ln\left[\dfrac{1}{2}\right] \iff -2\ln 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant -\ln 2 \Rightarrow -2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

On a donc démontré que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [-2~;~0]$, alors $u_{n+1} \in [-2~;~0]$.

- Croissance de la suite :

- Initialisation : $u_0 \leqslant u_1$: vraie

Hérédité : suposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$; par croissance de la fonction g,$g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \iff u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

On a démontré par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

b. $v_0 = 0 \Rightarrow u_1 = g(v_0) = g(0) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

On a donc $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.

Démonstration par récurrence : on vient d'initialiser la propriété.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0$. Par application de la fonction g qui est croissante sur $[-1\ ;\ 0]$, on obtient :

$$g(-2) \leqslant g(u_n) \leqslant g(v_n) \leqslant g(v_{n-1}) \leqslant g(0)$$

soit $-2\ln 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant -\ln 2 \Rightarrow -2 \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 0$.
La récurrence est établie.

3. **a.** par :
m est une somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;+\infty[$; elle est dobnc dérivable et sur $[0\ ;+\infty[$, $m'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$ puisque c'est un quotient de termes positifs.
Donc m est croissante sur $[0\ ;+\infty[$ et $m(0) = 0 - \ln 1 = 0$.
Conclusion : la fonction est positive, soit $x - \ln(1+x) \geqslant 0 \iff \ln(1+x) \leqslant x$.

b. Pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} = g(v_n) - g(u_n) = \ln\left(\dfrac{1}{2-v_n}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{2-u_n}\right) = -\ln(2-v_n) + \ln(2-u_n) = \ln\dfrac{2-u_n}{2-v_n} = \ln\dfrac{2-v_n+v_n-u_n}{2-v_n} = \ln\left[1 + \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\right]$.
On a montré que tout entier n, $u_n \leqslant v_n$, donc $v_n - u_n \geqslant 0$ et $-2 \leqslant v_n \leqslant 0 \iff 0 \leqslant -v_n \leqslant 2 \iff 2 \leqslant 2 - v_n \leqslant 4$, donc $2 - v_n \geqslant 0$.
Il en résulte que $\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n} \geqslant 0$.
Or on a montré que pour $x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$, en appliquant ce résultat à $x = \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}$, on en déduit que $\ln\left[1 + \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\right] \leqslant \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}$.
Donc finalement

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

On sait que :
$-2 \leqslant v_n \leqslant 0 \iff 0 \leqslant -v_n \leqslant 2 \iff$
$2 \leqslant 2 - v_n \leqslant 4 \iff \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2-v_n} \leqslant \dfrac{1}{2} \iff$
$\dfrac{u_n-v_n}{2} \leqslant \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n} \leqslant \dfrac{u_n-v_n}{2} \iff \ln\left[1 + \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\right] \leqslant \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$.
Montrons par récurrence que pour tout naturel n, $v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.
- Initialisation : pour $n = 0$, on a $v_0 - u_0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 (v_0 - u_0)$ qui est vraie.
- Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.
On a montré que $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$ soit en utilisant l'hypothèse de récurrence :
$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$ soit
$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$. On a vu que pour tout n, $v_n - u_n \geqslant 0$, donc finalement

$$0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

Comme $v_0 - u_0 \geqslant 0$ et que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une suite positive, la suite $(v_n - u_n)$ est une suite à termes positifs.

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, le théorème des « gendarmes » montre que

$$\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Finalement la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et la limite de leurs différences est nulle : elles sont donc adjacentes, sont convergentes et ont donc la même limite.

4. La calculatrice donne $u_{10} \approx -1,14622$, donc à 10^{-4} près

$$-1,1463 \leqslant u_{10} \leqslant -1,1462.$$

De même on obtient $v_{10} \approx -1,14618$, donc à 10^{-4} près

$$-1,1462 \leqslant v_{10} \leqslant -1,1461.$$