Baccalauréat Amérique du Sud série S novembre 2003

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Les jetons étant indiscernables, la probabilité de tirer l'un quelconque d'entre eux est égale à
   - $\frac{1}{4}$ pour -1 ;
   - $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ pour 0 ;
   - $\frac{1}{4}$ pour 1 ;

   Puisque l'on tire les trois coordonnées la probabilité que le point M soit en A est égale à celle d'obtenir le triplet $(1\,;\,-1\,;\,-1)$, soit $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.
2. Les tirages conduisant à E_1 sont de la forme $(a\,;\,0\,;\,0)$ avec a quelconque.

   On a donc $p(E_1) = 1 \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$.
3. **a.** On sait qu'une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme $1x + 1y + 1z + d = 0$ et comme $O \in \mathcal{P}$, on en déduit que $d = 0$.

   $$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{P} \iff x + y + z = 0.$$

   b. Voir la figure à la fin.

   c. Il faut chercher les tirages $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $x+y+z = 0$. Sur les 27 tirages possibles :
   - si $x = -1$, il faut $y = 1$ et $z = 0$ ou inversement soit $(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $(-1\,;\,0\,;\,1)$;
   - si $x = 0$, on peut avoir $y = 0$ et alors $z = 0$, sinon $y = 1$ et $z = -1$ ou inversement soit les trois tirages $(0\,;\,0\,;\,0)$, $(0\,;\,1\,;\,-1)$ et $(0\,;\,-1\,;\,1)$;
   - si $x = 1$ il faut que l'un des autres tirages soit -1 et le dernier 0, soit les deux tirages $(1\,;\,0\,;\,-1)$ et $(1\,;\,-1\,;\,0)$.

   On a donc $p(E_2) = 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3+2}{16} \frac{5}{16}$.
4. Parmi les 27 points de la figure, seuls les sommets du cube sont à une distance $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} > 1,5$.

   Comme il y a 8 sommets, la probabilité de l'évènement $\overline{E_3}$ est égale à $8 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{8}$, d'où $p(E_3) = 1 - p\left(\overline{E_3}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Partie I

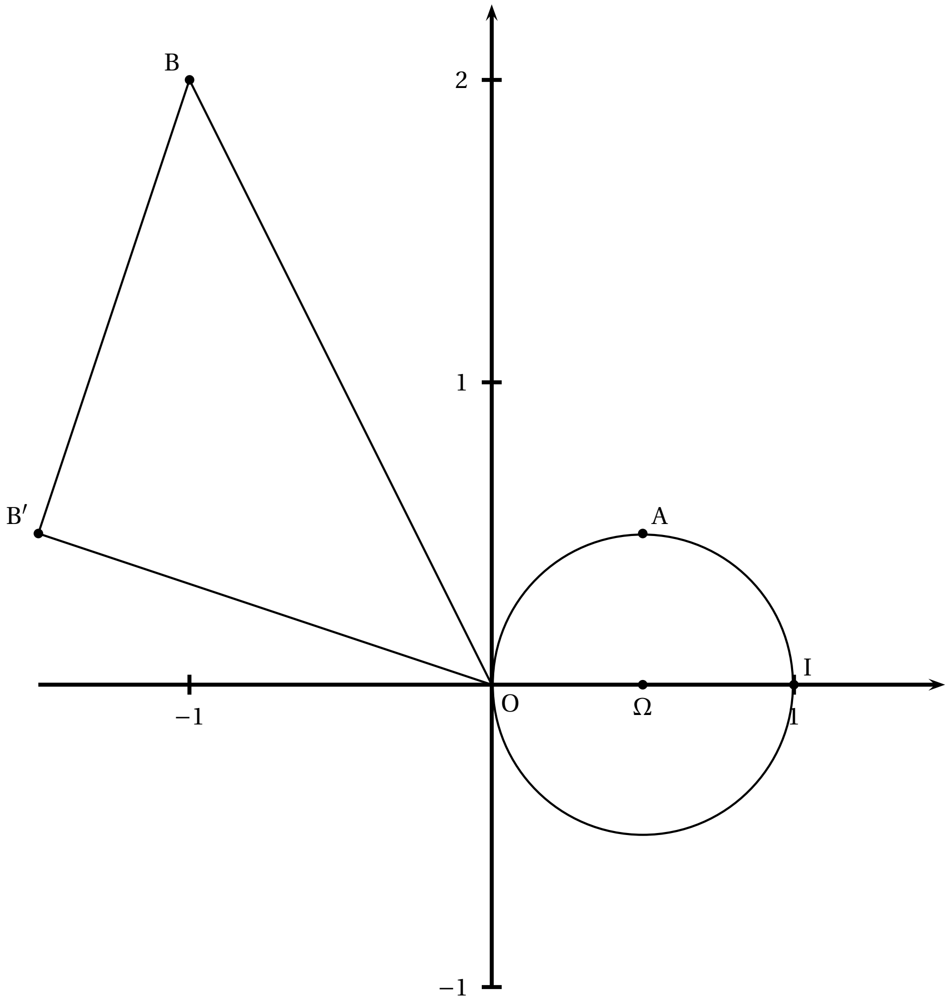
1. Le centre Ω du cercle $\mathcal{C}$ a pour affixe $\frac{1}{2}$ qui est donc le rayon du cercle.

   A_0 appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $A_0\Omega = \frac{1}{2} \iff |\omega - a_0| = \frac{1}{2} \iff \left|\frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \frac{1}{2}$ qui est bien vraie.

   a. $b' = a_0 b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(-1 + 2\mathrm{i}) = -\frac{1}{2} - 1 + \mathrm{i}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

b. On a $\arg\dfrac{0-b'}{b-b'} = \arg\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\text{i}}{-1+2\text{i}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\text{i}} = \arg\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\text{i}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\text{i}} = \arg\dfrac{3-\text{i}}{1+3\text{i}} = \arg\dfrac{(3-\text{i})(1-3\text{i})}{(1+3\text{i})(1-3\text{i})} =$ $\arg\dfrac{-10\text{i}}{10} = \arg(-\text{i}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Ceci montre que $\left(\overrightarrow{\text{B}'\text{B}}\,,\,\overrightarrow{\text{B}'\text{O}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$, c'est-à-dire que le triangle OBB′ est rectangle en B′.



Partie II

1. **a.** Comme $a \neq 0$ et $a \neq 1$, le quotient $\dfrac{a-1}{a}$ existe et est non nul. On sait que $\dfrac{a-1}{a} = \arg\left(\dfrac{\overrightarrow{\text{OA}}}{,}\ \overrightarrow{\text{IA}}\right) \quad [2\pi]$ Comme $z \neq 0$, $\left(\overrightarrow{M'\text{O}}\,,\,\overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\dfrac{z-az}{0-az}\right) \quad [2\pi] =$ $\arg\left(\dfrac{1-a}{-a}\right) \quad [2\pi] = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) \quad [2\pi]$.

b. Le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si $\left(\overrightarrow{M'\text{O}}\,,\,\overrightarrow{M'M}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) \quad [2\pi] = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

Donc OMM' est rectangle en M' si et seulement si $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,,\,\overrightarrow{\text{IA}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \iff \left(\overrightarrow{\text{AO}}\,,\,\overrightarrow{\text{AI}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Finalement OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle de de diamètre [AI] exceptés les points O et I.

2. Calculons $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,,\,\overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \arg\left(\dfrac{ax-0}{a-0}\right) = \arg x \quad [2\pi] = 0 \quad [2\pi]$.

Ceci montre que les points O, A et M' sont alignés.

D'après la question précédente le triangle OMM' est rectangle en M'. Donc $\left(MM'\right)$ est perpendiculaire à la droite (OM') ou encore à la droite (OA) : M' est donc le projeté orthogoanl de M sur la la droite (OA).

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Partie A

1. 3 divise $5(15-x)$ et est premier avec 5 : il divise donc $15-x$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $15-x = 3k \iff x = 15-3k$.

En reportant dans l'équation initiale : $3y = 5 \times 3k \iff y = 5k$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont les couples $[(15-3k)\ ;\ 5k],\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Après p rotations r_1 et q rotations r_2, le point A a parcouru $\dfrac{p\pi}{3} + \dfrac{q\pi}{5}$ (cm). Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'équation :

$$\frac{p\pi}{3} + \frac{q\pi}{5} = 2,5 \times 2\pi \times 1 \iff 5p+3q = 75$$

Cette équation peut s'écrire : $3q = 75-5p \iff 3q = 5(25-p)$.

Donc d'après la question précédente les couples solutions sont de la forme $(15-3k\ ;\ 5k),\ k \in \mathbb{N}$.

Or $15-3k \geqslant 0 \iff k \leqslant 5$ et $5k \geqslant 0 \iff k \geqslant 0$. Donc $k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$. Ce qui donne les couples :

$$(15\ ;\ 0),\ (12\ ;5),\ (9\ ;\ 10),\ (6, 15),\ (3\ ;\ 20)(0\ ;\ 25)$$

Partie B

1. s_1 composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre est une similitude de centre O, de rapport 4 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

s_2 composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre est une similitude de centre O, d'angle $\dfrac{\pi}{5} + \pi = \dfrac{6\pi}{5}$ et de rapport 6.

a. S_m composée de m similitudes de même centre est une simili tude de centre O de rapport 4^m et d'angle $m \times \dfrac{\pi}{3}$;

S_n composée de n similitudes de même centre est une simili tude de centre O de rapport $(6)^n$ et d'angle $n \times \dfrac{6\pi}{5}$ f composée de similitudes de même centre est une similitude de centre O, de rapport $4^m \times (-6)^n$ et d'angle $m \times \dfrac{\pi}{3} + n \times \dfrac{6\pi}{5}$.

Or $4^m \times (6)^n = \left(2^2\right)^m \times [2 \times 3]^n = 2^{2m} \times 2^n \times 3^n = 2^{2m+n} \times 3^n$.

b. On sait que $144 = 12^2 = \left(2^2 \times 3\right)^2 = 2^4 \times 3^2$.

f est une homothétie de rapport 144 si et seulement si $\left\{\begin{array}{lcl} 2m+n & = & 4 \\ n & = & 2 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lcl} m & = & 1 \\ n & = & 2 \end{array}\right.$

Dans ce cas l'angle de f serait égal à : $\dfrac{\pi}{3} + 2 \times \dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{5\pi + 36\pi}{15} = \dfrac{41\pi}{15} \neq 0 \quad [\pi]$.

Conclusion f ne peut avoir un rapport de 144.

c. On a O$M = 6$, donc le rapport de f serait égal à $\dfrac{240}{6} = 40 = 2^3 \times 5$. Ceci n'est pas possible puisque le rapport de f soit $2^{2m+n} \times 3^n$ n'est pas multiple de 5.

De même O$M = 6$ et $\text{OM}' = 576$ entraîne que le rapport de f serait égal à $\dfrac{576}{6} = 96 = 2^5 \times 3^1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2m+n & = & 5 \\ n & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} m & = & 2 \\ n & = & 1 \end{array}\right.$

Conclusion : $\text{OM}' = 576$ si et seulement si $m = 2$ et $n = 1$.

L'angle de f serait alors égal à $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{28\pi}{15}$.

PROBLÈME **11 points**

$$f(x) = \frac{1}{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}$$

Partie A

1. $f(-x) = \dfrac{1}{\text{e}^{-x} + \text{e}^{x}} = f(x)$: la fonction f est donc paire. Donc Γ est symétrique autour de l'axe des ordonnées.
2. On a $x \geqslant 0 \Rightarrow -x \leqslant x \iff \text{e}^{-x} \leqslant \text{e}^x$.
3. **a.** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

   b. Comme $\text{e}^x > 0$, f inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $f'(x) = -\dfrac{\text{e}^x - \text{e}^{-x}}{\left(\text{e}^x + \text{e}^{-x}\right)^2}$.

   On a vu que $\text{e}^x - \text{e}^{-x} \geqslant 0$ et $\left(\text{e}^x + \text{e}^{-x}\right)^2 > 0$, donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leqslant 0$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** On a démontré que :

   $0 < \text{e}^{-x} \leqslant \text{e}^x \Rightarrow 0 + \text{e}^x < \text{e}^{-x} + \text{e}^x \leqslant \text{e}^x + \text{e}^x$

   $\iff \text{e}^x < \text{e}^{-x} + \text{e}^x < 2\text{e}^x \iff \dfrac{1}{2\text{e}^x} \leqslant \dfrac{1}{\text{e}^{-x} + \text{e}^x} < \dfrac{1}{\text{e}^x} \iff$

   $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

   b. On en déduit que sur $[0\,;\,+\infty[$, la courbe Γ est située au dessus de la Γ_2 et en dessous de la courbe Γ_1.

   Tangente au point $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$: elle passe par ce point et a pour coefficient directeur $f'(0) = 0$: elle est donc horizontale

Partie B

1. I_n est l'intégrale d'une fonction positive et continue définie sur une partie de $[0\,;\,+\infty[$: cette intégrale existe et est positive.

   Elle est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites verticales d'équations $x = n$ et $x = n+1$.
2. **a.** Sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$, la fonction f est décroissante ; donc

   $n \leqslant x \leqslant n+1 \Rightarrow f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.

   En intégrant ces trois fonctions sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$ on a donc

   $\displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)\,\text{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\text{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\text{d}x \iff$

   $\displaystyle f(n+1)\int_n^{n+1} 1\,\text{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\text{d}x \leqslant f(n)\int_n^{n+1} 1\,\text{d}x$

   ou encore $f(n+1)[(n+1)-n] \leqslant I_n \leqslant f(n)[(n+1)-n] \iff$

   $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

b. D'après la question précédente
$f(n+2) \leqslant I_{n+1} \leqslant f(n+1)$ et donc par transitivité $I_{n+1} \leqslant I_n$.
La suite (I_n) est décroissante.

c. La suite (I_n) est décroissante et minorée par zéro : elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.
Or on a vu $I_n \leqslant f(n)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$.
D'après le théorème des « gendarmes », on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \ell = 0$.

Partie C

1. Sur l'intervalle $[0\,;\, n]$, les fonctions h, f et g sont positives et intégrables.
$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \displaystyle\int_0^n h(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x$, soit
$\displaystyle\int_0^n \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant J_n \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \iff \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^n \leqslant J_n \leqslant \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^n \iff$
$\dfrac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-n}\right) \leqslant J_n \leqslant 1-\mathrm{e}^{-n}$.
Comme $\mathrm{e}^{-n} > 0$, $1-\mathrm{e}^{-n} < 1$.

2. $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Cette dernière intégrale est positive comme intégrale d'une fonction positive avec $n < n+1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
$J_{n+1} - J_n > 0 \Rightarrow J_{n+1} > J_n$. La suite (J_n) est croissante.
La suite (J_n) est croissante et majorée par 1 : elle converge donc vers une limite L inférieure ou égale à 1.

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$.
En utilisant le théorème admis on en déduit que :

$$\frac{1}{2} \leqslant L \leqslant 1.$$

4. **a.** En partant de l'énoncé et en multipliant chaque terme par e^x, on obtient $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2+1}$.

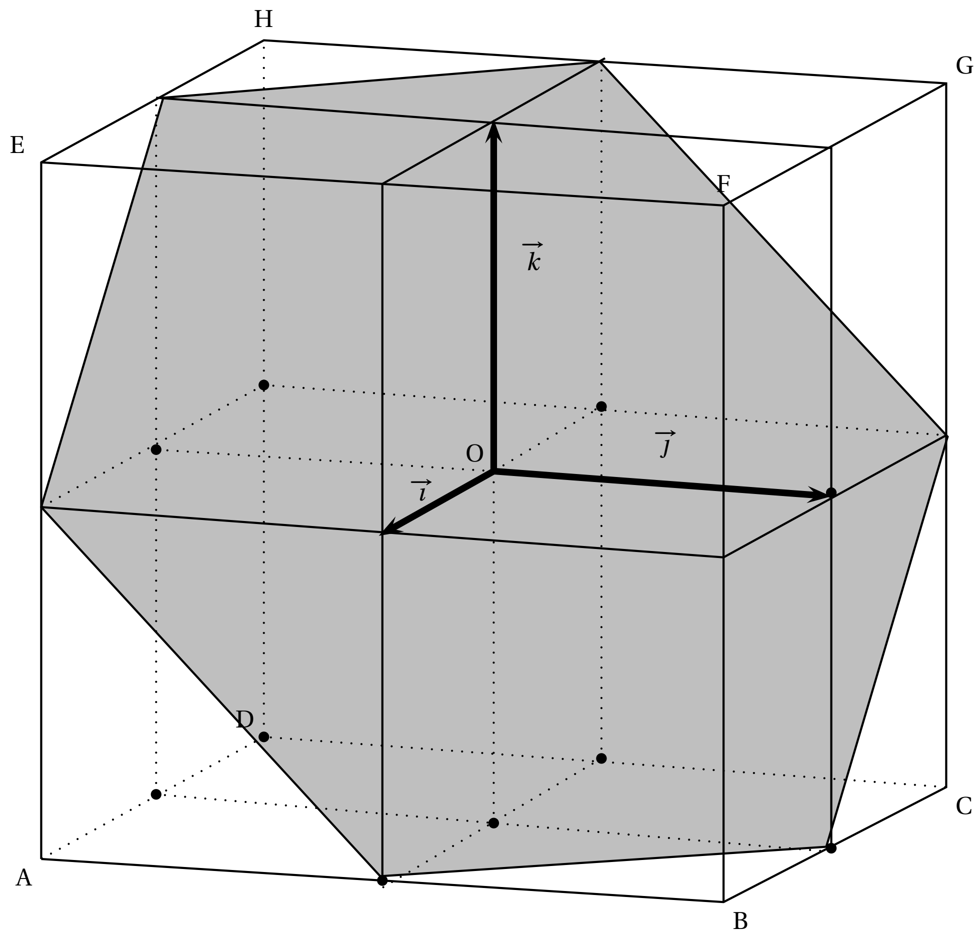
b. La dérivée de la fonction $v\left(\mathrm{e}^x\right)$ est $v'\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^x \times u\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^x \times \dfrac{1}{1+(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2+1} = f(x)$.

c. On a donc $J_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{dx} = \left[v\left(\mathrm{e}^x\right)\right]_0^n = v\left(\mathrm{e}^n\right) - v(1) = v\left(\mathrm{e}^n\right) - \frac{\pi}{4}$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v\left(\mathrm{e}^n\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = L = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.

$$L = \frac{\pi}{4}.$$

Annexe de l'exercice 1

Cette page sera complétée et remise avec la copie



Annexe du problème

Cette page sera complétée et remise avec la copie