Correction des questions supplémentaires sur l'Exercice de Bac 2 (suite d'intégrales)

Pour tout entier naturel n non-nul, on a $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

Montrons que pour tout $\boldsymbol{n}$ de $\mathbb{N}^*$: $\boldsymbol{u_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)u_n}$

Avec les 4 fonctions continues sur [0 ; 1], définies par :

$u(x) = x^{n+1}$; $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -e^{-x}$; $v'(x) = e^{-x}$, on a par IPP :

$\int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx = [-e^{-x}x^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{-x} dx = -e^{-1} + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$

On a donc bien : $u_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)u_n$

Calculons $\boldsymbol{u_1 = \int_0^1 xe^{-x} dx}$

Avec les 4 fonctions continues sur [0 ; 1], définies par :

$f(x) = x$; $f'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$; $v'(x) = e^{-x}$, on a par IPP :

$\int_0^1 xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx = -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1} + 1$

Donc $u_1 = -2e^{-1} + 1$

Calculons $\boldsymbol{u_2 = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx}$

On sait que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\boldsymbol{u_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)u_n}$, donc $u_{1+1} = -e^{-1} + (1+1)u_1$

C'est-à-dire : $\boldsymbol{u_2 = -e^{-1} + 2u_1} = -e^{-1} + 2(-2e^{-1} + 1) = -5e^{-1} + 2$

En programmant la suite (évidemment positive) sur calculatrice, excel ou Pyhon, u_{18} est négatif !!!!!!

```
import math
u=1-2*math.exp(-1)
n=1
for k in range(20):
    u=(n+1)*u-math.exp(-1)
    n=n+1
print(u)
```