A rendre pour le ……/……/20….

Durée : Temps libre

Coefficient : 1

Calculatrice autorisée

Exercice 1

Message de Léonard de Vinci

Léonard de Vinci a laissé plusieurs citations célèbres et l'une d'elles semble tout particulièrement destinée aux élèves du cours de mathématiques. Elle a été cryptée avec un code de César.
L'objectif de cet exercice est de trouver la clé de codage puis de déchiffrer cette phrase. Cette clé sera trouvée grâce à un trinôme dont il faut obtenir les trois coefficients.

Léonard de Vinci (né en 1452 à Vinci en Toscane et mort en 1519 à Amboise en Touraine, est un peintre italien polymathe, à la fois artiste, organisateur de spectacles et de fêtes, scientifique, ingénieur, inventeur, anatomiste, sculpteur, architecte, urbaniste, botaniste, musicien, philosophe et écrivain.

PARTIE 1

Un des coefficients du trinôme qui donnera la clé de codage est la racine entière positive du polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=10x^3-37x^2-13x+4$.

1. Vérifier que $-\frac{1}{2}$ est une racine de P.

2. On admet que P est factorisable par $\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c)$ pour tout x réel.

3. Déterminer toutes les racines de P.

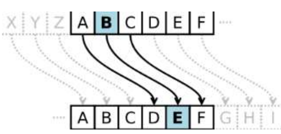
4. En déduire le coefficient demandé.

PARTIE 2

Soit f le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+5x-2$. Soit g le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^2-x-10$.

Un des coefficients du trinôme qui donnera la clé de codage est le plus petit entier naturel d'un intervalle sur lequel f et g sont positives toutes les deux.

Retrouver ce nombre en étudiant le signe de ces fonctions.



Le **code César** est un chiffrement basé sur un décalage de l'alphabet (déplacement des lettres plus loin dans l'alphabet).

PARTIE 3

f est une fonction trinôme vérifiant :
$f(1)=18$;
$f(-1)=2$;
$\Delta=160$.

Un des coefficients du trinôme qui donnera la clé de codage est l'ordonnée du sommet de la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction f. Cette ordonnée est un nombre entier.

Déterminer f à l'aide des indications ci-dessus et d'un système, puis déterminer le coefficient demandé.

MISE EN COMMUN

Le trinôme recherché est de la forme ax^2+bx+c où c est la solution de la partie 1, a est la solution de la partie 2 et b est la solution de la partie 3.

1. Écrire l'expression du trinôme recherché.

2. La différence entre la somme et le produit des racines de ce trinôme est la clé permettant de décoder le message de Léonard de Vinci. Décoder le message.

TI ZQOCMCZ DQMVB BWCRWCZA
I JWCB LM T'WJABIKTM

Exercice 2

Le nombre d'or

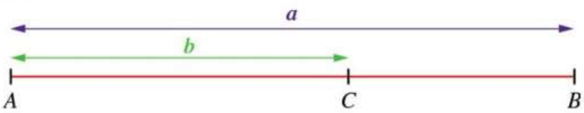
Nombre étonnant et mystérieux, ce nombre est connu depuis l'Antiquité dans de nombreux domaines.

1. La divine proportion

> « Une droite est partagée en extrême et moyenne raison quand la droite totale est au plus grand segment ce que le plus grand segment est au petit. »

Euclide, *Éléments*, livre VI, 3ᵉ définition.
Note : Pour Euclide, « droite » signifie segment.

a. On note $AB=a$ et $AC=b$ avec $b\neq 0$.

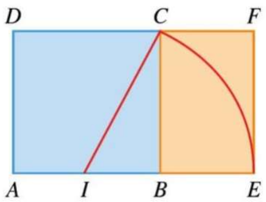


Soit $x=\frac{a}{b}$. Démontrer que si C partage le segment $[AB]$ en extrême et moyenne raison, alors x vérifie l'égalité $x^2-x-1=0$.

b. Résoudre l'équation précédente. La solution positive est appelée « nombre d'or » et est notée Φ.

2. Construction géométrique du nombre d'or

a. $ABCD$ est un carré de côté 1 et I est le milieu de $[AB]$. Le cercle de centre I et de rayon IC coupe $[AB)$ en E. Construire le rectangle $AEFD$.



b. Calculer la longueur IC. En déduire que $AE=\Phi$.

c. Montrer que $\frac{1}{\Phi}=\Phi-1$.

d. Un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur est égal à Φ.
Montrer que $AEFD$ et $BCFE$ sont des rectangles d'or.

3. Puissances successives du nombre d'or

a. Montrer que $\Phi^2=\Phi+1$, puis que $\Phi^3=2\Phi+1$. En déduire Φ^4 et Φ^5 en fonction de Φ.

b. Montrer que si $\Phi^n=\alpha\Phi+\beta$, avec n un entier naturel, alors $\Phi^{n+1}=(\alpha+\beta)\Phi+\alpha$.

c. Dans un tableur, ouvrir une feuille de calcul et écrire, dans la colonne A, la suite des premiers entiers naturels.

	A	B	C
1		a	b
2	1	1	0
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		

Utiliser la question **b.** pour écrire les formules en B3 et C3 qui permettent d'obtenir Φ^2.
En déduire l'expression de Φ^{20} en fonction de Φ.

****
***
*

<u>Durée</u> : Temps libre

<u>Coefficient</u> : 1

Calculatrice autorisée